

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ

XẤP XỈ KHÔNG ĐIỂM CHUNG
CỦA HAI TOÁN TỬ KIỂU ĐƠN ĐIỀU
VÀ ỨNG DỤNG

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2017

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ**

**XẤP XỈ KHÔNG ĐIỂM CHUNG
CỦA HAI TOÁN TỬ KIỂU ĐƠN ĐIỀU
VÀ ỨNG DỤNG**

Mã số: B2016-TNA-26

Xác nhận của tổ chức chủ trì
(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên)

Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2018

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính

1. Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	ThS. Nguyễn Thanh Mai	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu tính ổn định của các phương pháp lặp
2	ThS. Nguyễn Thanh Hường	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp lặp luân phiên và điểm gần kề kết hợp với phương pháp lặp Halpern cho bài toán xác định không điểm chung của họ toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Banach
3	ThS. Bùi Việt Hương	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh phân rã.
4	ThS. Nguyễn Song Hà	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp lai ghép cho bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên tập điểm của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn.

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Viện CNTT, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS. TS. Nguyễn Bường

Mục lục

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính	iii
Một số ký hiệu và viết tắt	vi
Mở đầu	1
Chương 1 Kiến thức chuẩn bị	4
1.1. Một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach	4
1.2. Một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu . . .	9
1.2.1. Phương pháp điểm gần kề	10
1.2.2. Phương pháp lặp kiểu Halpern	11
1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm	12
1.3. Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh . . .	13
1.3.1. Khoảng cách Bregman và phép chiếu Bregman	13
1.3.2. Ánh xạ Bregman không giãn mạnh	15
1.4. Một số bổ đề bổ trợ	16
Chương 2 Về bài toán Xấp xỉ không điểm của toán tử kiểu đơn điệu	20
2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép	20
2.2. Phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu	29
2.2.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ	29
2.2.2. Tính ổn định của phương pháp	38
2.2.3. Ví dụ số minh họa	42
2.3. Phương pháp prox-Tikhonov xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu	43
2.3.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ	43
2.3.2. Tính ổn định của phương pháp	52
2.3.3. Ví dụ số minh họa	55

2.4. Xấp xỉ điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn	57
--	----

Chương 3 Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach 59

3.1. Sự hội tụ của phương pháp lặp song song	61
3.2. Ứng dụng	68
3.2.1. Bài toán điểm cực tiểu tách	68
3.2.2. Bài toán chấp nhận tách	70
3.3. Ví dụ số minh họa	70

Chương 4 Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh 72

4.1. Phương pháp lặp song song	72
4.2. Ứng dụng	78
4.2.1. Bài toán chấp nhận lỗi	78
4.2.2. Không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại	78
4.2.3. Bài toán cân bằng	79
4.2.4. Không điểm chung của các toán tử Bregman ngược đơn điệu mạnh	81
4.2.5. Bất đẳng thức biến phân	82
4.3. Hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát	82

Kết luận 85

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x \in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$d(x, M)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp M
$\mathcal{H}(C_1, C_2)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp C_1 và C_2
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lồi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$\operatorname{Fix}(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t
TOL	sai số của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm chính xác
$\operatorname{int}(C)$	phần trong của tập hợp C

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

Tên đề tài: Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và ứng dụng

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trương Minh Tuyên

Email: tuyentm@tnus.edu.vn

Điện thoại: 0982890409

Cơ quan chủ trì: Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 2016-2017

2. Mục tiêu

- Đề xuất các phương pháp xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và mở rộng cho trường hợp hữu hạn toán tử dựa trên sự cải tiến phương pháp lặp của H. H. Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich [2];
- Đề xuất các phương pháp xấp xỉ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của các ánh xạ không giãn hay tập không điểm chung của các toán tử kiểu đơn điệu.

3. Tính mới và tính sáng tạo

Đề tài đã nghiên cứu và đưa ra các phương pháp lặp mới cho bài toán tìm không điểm chung của hai (hữu hạn) toán tử kiểu đơn điệu, bài toán không điểm chung tách và bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach cùng với một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các lớp bài toán khác.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề tài đã nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp luận phiên với phương pháp xấp xỉ gắn kết và phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach (02 bài báo khoa học);
- Đề tài đã nghiên cứu phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach (01 bài báo khoa học);
- Đề tài đã nghiên cứu phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ (02 bài báo khoa học).

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

1. Tuyen T.M. (2017), “A strong convergence theorem for the split common null point problem in Banach spaces”, *Appl. Math. Optim.*, doi.org/10.1007/s00245-017-9427-z. (SCI)
2. T.M. Tuyen (2017), “On the strong convergence theorem of the hybrid viscosity approximation method for zeros of m -accretive operators in Banach spaces”, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), pp. 287–299. (Scopus)
3. Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), “Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces”, *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4. (SCIE)
4. Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for Bregman strongly non-expansive operators in reflexive Banach spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3), 1695–1710 (SCIE)
5. Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for solving systems of generalized mixed equilibrium problems in reflexive Banach spaces”, *Optimization*, 66(4), pp. 623–639 (SCIE)

5.2. Sản phẩm đào tạo

- Hướng dẫn 05 luận văn cao học:

1. Nguyễn Thị Hồng Phương (2016), *Phương pháp xấp xỉ gắn kết lại ghép cho bài toán xác định không điểm của toán tử j -đơn điệu*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
2. Nguyễn Văn Quân (2016), *Phương pháp điểm gần kề quán tính xác định không điểm của toán tử đơn điệu và ngược đơn điệu mạnh trong không gian Hilbert*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
3. Nguyễn Thị Thu Thủy (2016), *Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn trong không gian Banach*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
4. Nguyễn Thiên Quang (2017), *Một số phương pháp lai tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.
5. Hoàng Thị Thương (2017), *Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 01 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:

1. Trần Thị Thanh Loan (2016), *Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích

mang lại

- Về khoa học: Công bố được một số kết quả mới, có ý nghĩa khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín ISI (thuộc chủ đề nghiên cứu của đề tài).
- Về giáo dục và đào tạo: Hướng dẫn thạc sĩ, hỗ trợ luận án tiến sĩ của một thành viên đề tài, phục vụ hiệu quả cho công tác giảng dạy sau đại học các chuyên ngành về Toán tại Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.
- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu các thành viên trong nhóm thực hiện đề tài, mở rộng hợp tác nghiên cứu.

Tổ chức chủ trì*(ký, họ tên, đóng dấu)***Chủ nhiệm đề tài***(ký, họ tên)***Trương Minh Tuyên**

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General Information

Project title: Approximate a common zero for two monotone type operators and applications

Code number: B2016-TNA-26

Coordinator: Dr. Truong Minh Tuyen

Email: tuyentm@tnus.edu.vn

Phone: 0982890409

Implementing institution: Thai Nguyen University

Duration: From 1/2016 to 12/2017

2. Objectives

- Study the approximation methods to find the common zero of two monotone type operators and extend this methods for the problem of finding a common zero of a finite family of monotone operators base on the modification of iterative method of H. H. Bauschke, P. L. Combettes and S. Reich in [11];
- Study the solution approximation methods of the variational inequalities over the set of common fixed points of nonexpansive mappings or the set of common zeros of monotones type operators.

3. Novelty and creativity

The project studied and gave some new iterative methods for solving the problem of finding a common zero of two (finite) monotone type operators, the split common null point problem, and the problem of finding a common fixed point of a finite family of Bregman strongly nonexpansive operators in Banach spaces and some applications of obtained results for some problems related.

4. Research results

- The project studied the combination alternating iterative method with the viscosity approximation method and prox-Tikhonov method for solving the problem of finding a common zero of two accretive operators in Banach spaces (02 papers);
- The project studied two parallel iterative methods for solving the split common null point problem in Banach spaces (01 paper);
- The project studied two parallel iterative methods for solving the problem of finding a common fixed point of a finite family of Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces (02 papers).

5. Products

5.1. Scientific publications

1. Tuyen T.M. (2017), “A strong convergence theorem for the split common null

point problem in Banach spaces”, *Appl. Math. Optim.*, doi.org/10.1007/s00245-017-9427-z. (SCI)

2. T.M. Tuyen (2017), “On the strong convergence theorem of the hybrid viscosity approximation method for zeros of m -accretive operators in Banach spaces”, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), pp. 287–299. (Scopus)

3. Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), “Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces”, *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4. (SCIE)

4. Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for Bregman strongly non-expansive operators in reflexive Banach spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3), 1695–1710 (SCIE)

5. Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for solving systems of generalized mixed equilibrium problems in reflexive Banach spaces”, *Optimization*, 66 (4), pp. 623–639 (SCIE)

5.2. Training results: 05 master of theses

1. Nguyen Thi Hong Phuong (2016), *Hybrid viscosity approximation method for the problem of finding zero of accretive operators*, Thai Nguyen University of Sciences.

2. Nguyen Van Quan (2016), *Inertial proximal point method for zeros of monotone operators and inverse strongly monotone operators in Hilbert spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.

3. Nguyen Thi Thu Thuy (2016), *Tikhonov regularization method and regularization inertial proximal point method for the problem of finding common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.

4. Nguyen Thien Quang (2017), *Hybrid methods for finding a common fixed point of a family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.

5. Hoang Thi Thuong (2017), *Approximate a common zero of two accretive operators in Banach spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.

01 scientific research students

1. Tran Thi Thanh Loan (2016), *Variational inequalities over the set of common fixed points of finite family of nonexpansive mappings*, Thai Nguyen University of Sciences.

6. Applications and effectiveness

- On the scientific aspect: Publishing some scientific results in ISI journals of mathematics (in the research topic of the project).

- On educational aspect: Instructing 5 master theses, supporting a PhD thesis, teaching undergraduate students and graduate students in mathematics at Thai Nguyen University of Sciences.
- Strengthening the research capacity for the investigators of the projects, deepening the cooperation in scientific research with domestic and international research institution.

Mở đầu

Bài toán xác định không điểm của toán tử j -đơn điệu có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như khoa học vật lý, tối ưu hóa, toán kinh tế, toán tài chính. . . Ở đây, ta quan tâm đến bài toán sau:

Xác định một phần tử $x^* \in E$ sao cho:

$$0 \in A(x^*), \quad (0.1)$$

trong đó $A : E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu xác định trên không gian Banach E . Ta biết rằng khi E là không gian Hilbert thì toán tử j -đơn điệu được gọi là toán tử đơn điệu.

Khi $A : H \longrightarrow 2^H$ một toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert H , thì R. T. Rockafellar [57] đã đề xuất phương pháp điểm gần kề để xác định dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_n \in c_n A x_{n+1} + x_{n+1}, \quad x_0 \in H, \quad (0.2)$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp lặp (0.2) chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A .

Trong những năm gần đây, xuất phát từ một số mô hình toán thực tế trong tối ưu hóa và vật lý, bài toán tìm không điểm của tổng của hai toán tử đơn điệu cực đại hay bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và tổng quát hơn là bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử kiểu đơn điệu, đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Năm 2005, H. H. Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich [11] đã đề xuất kết hợp phương pháp điểm gần kề và phương pháp lặp luân phiên cho bài toán xác định không điểm của hai toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert. Tuy nhiên, họ chỉ thu được sự hội tụ yếu. Như vậy một vấn đề đặt ra là liệu rằng có thể cải tiến phương pháp lặp luân phiên cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu, đồng thời phương pháp đặt ra sẽ hội tụ mạnh đến nghiệm của bài toán.

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lời: “Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ

hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i \in I}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E ". Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lý ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học ... Một trong những mở rộng của lớp ánh xạ không giãn trong không gian Banach là lớp ánh xạ Bregman không giãn mạnh (không giãn theo khoảng cách Bregman). Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ Bregman không giãn mạnh có mối liên hệ mật thiết với các bài toán khác như bài toán chấp nhận lồi, bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại, bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân ... Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh có nhiều ý nghĩa quan trọng và đang được nhiều người làm toán trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Mục đích của đề tài này là:

- Nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp luân phiên với phương pháp xấp xỉ mềm hay phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach;
- Phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach;
- Nghiên cứu phương pháp lặp song song giải bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh và hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ;
- Đưa ra một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các lớp bài toán liên quan.

Nội dung chính của đề tài được chia làm bốn chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach, một số phương pháp tìm không điểm của toán tử kiểu đơn điệu (phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm), khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman, ánh xạ Bregman không giãn mạnh và một số bổ đề hỗ trợ cần sử dụng trong chứng minh các định lý chính được đề cập ở những chương sau của đề tài.

Chương 2. Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

Chương này trình bày các kết quả nghiên cứu của đề tài của các tác giả T.M. Tuyen [65], J.K. Kim và T.M. Tuyen [39], [40], T.M. Tuyen và N.S. Ha [66] về phương pháp lai ghép tìm không điểm của một toán tử j -đơn điệu, phương

pháp lặp luân phiên kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm hay phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach và phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn, cùng với các ứng dụng của nó cho các bài toán liên quan. Ngoài ra, chúng tôi cũng xây dựng một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các phương pháp.

Chương 3. Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach

Chương này trình bày các kết quả nghiên cứu về phương pháp lặp song song của chủ nhiệm đề tài trong tài liệu [64] cho bài toán xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach, cùng với đó là một số ứng dụng cho các bài toán liên quan.

Chương 4. Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh

Chương này trình bày các kết quả đạt được của đề tài từ bài báo [62], [63] về hai phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ, cùng với đó là một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các bài toán liên quan.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm 4 mục, trong đó: Mục 1.1 giới thiệu sơ lược về một số đặc trưng cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach. Mục 1.2 đề cập đến một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu, bao gồm phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm. Mục 1.3 giới thiệu về khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh. Mục 1.4 trình bày một số bổ đề hỗ trợ cần sử dụng đến trong chứng minh các định lý được đề cập trong các chương sau của đề tài.

1.1. Một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach

Cho E là một không gian Banach và E^* là không gian đối ngẫu của nó. Để cho đơn giản và thuận tiện hơn, chúng tôi thống nhất sử dụng kí hiệu $\|\cdot\|$ để chỉ chuẩn trên E và E^* trong toàn bộ Chương 1 và Chương 2 của đề tài.

Trong đề tài này, chúng tôi thường xuyên sử dụng tính chất dưới đây của không gian Banach phản xạ.

Mệnh đề 1.1. (xem [1] trang 41) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:*

- i) E là không gian phản xạ.
- ii) Mọi dãy bị chặn trong E , đều có một dãy con hội tụ yếu.

Tiếp theo, trong mục này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học các không gian Banach, như: tính lồi, tính trơn, mô đun lồi, mô đun trơn ...

Định nghĩa 1.1. Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in E, x \neq y$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1$ ta có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1.$$

Chú ý 1.1. Định nghĩa 1.1 còn có thể phát biểu dưới các dạng tương đương sau: Không gian Banach E được gọi là lồi chặt nếu với mọi $x, y \in S_E$ thỏa mãn $\frac{\|x+y\|}{2} = 1$, suy ra $x = y$ hoặc với mọi $x, y \in S_E$ và $x \neq y$ ta có $\|tx + (1-t)y\| < 1$ với mọi $t \in (0, 1)$, trong đó

$$S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}.$$

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach E được gọi là lồi đều nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta(\varepsilon) > 0$ sao cho với mọi $x, y \in E$ mà $\|x\| = 1, \|y\| = 1, \|x - y\| \geq \varepsilon$ ta luôn có

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon).$$

Dễ thấy rằng nếu E là một không gian Banach lồi đều thì nó là không gian Banach lồi chặt. Tuy nhiên điều ngược lại không đúng, ví dụ dưới đây chỉ ra điều đó.

Ví dụ 1.1. (xem [1] trang 54) Xét $E = c_0$ (không gian các dãy số hội tụ về không) với chuẩn $\|\cdot\|_\beta$ xác định bởi

$$\|x\|_\beta = \|x\|_{c_0} + \beta \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i|^2}{i^2} \right)^{1/2}, \quad x = (x_i) \in c_0.$$

Khi đó, $(E, \|\cdot\|_\beta)$, $\beta > 0$ là một không gian lồi chặt nhưng không là không gian lồi đều.

Để đo tính lồi của không gian Banach E , người ta đưa vào khái niệm sau: Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số

$$\delta_E(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

Nhận xét 1.1. Mô đun lồi của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên đoạn $[0; 2]$. Không gian Banach E lồi chặt khi và chỉ khi $\delta_E(2) = 1$ (xem [1] trang 59). Ngoài ra, không gian Banach E là lồi đều khi và chỉ khi $\delta_E(\varepsilon) > 0, \forall \varepsilon > 0$ (xem [1] trang 60).

Mệnh đề 1.2. (xem [1] trang 56) *Mọi không gian Banach lồi đều bất kì là không gian phản xạ.*

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach E được gọi là trơn nếu với mỗi $x \in S_E$, tồn tại duy nhất $f_x \in E^*$ sao cho $\langle x, f_x \rangle = \|x\|$ và $\|f_x\| = 1$.

Định nghĩa 1.4. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux tại điểm $x \in S_E$ nếu với mỗi $y \in S_E$, tồn tại giới hạn

$$\frac{d}{dt}(\|x + ty\|)_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}. \quad (1.1)$$

Định nghĩa 1.5. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn. Khi đó:

- a) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux nếu nó khả vi Gâteaux tại mọi $x \in S_E$.
- b) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Gâteaux đều nếu với mọi $y \in S_E$ giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x \in S_E$.
- c) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet nếu với mọi $x \in S_E$, giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $y \in S_E$.
- d) Chuẩn trên E được gọi là khả vi Fréchet đều nếu giới hạn (1.1) tồn tại đều với mọi $x, y \in S_E$.

Định lý 1.1. (xem [1] trang 92) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

- a) *Nếu E^* là không gian lồi chặt thì E là không gian trơn.*
- b) *Nếu E^* là không gian trơn thì E là không gian lồi chặt.*

Định nghĩa 1.6. Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định bởi

$$\rho_E(\tau) = \sup\{2^{-1}(\|x + y\| + \|x - y\|) - 1 : \|x\| = 1, \|y\| = \tau\}.$$

Nhận xét 1.2. Mô đun trơn của không gian Banach E là hàm số xác định, liên tục và tăng trên khoảng $[0; +\infty)$ (xem [1] trang 95).

Ví dụ 1.2. [1] Nếu E là không gian l^p hoặc $L^p(\Omega)$, thì ta có

$$\rho_E(\tau) = \begin{cases} (1 + \tau^p)^{1/p} - 1 < \frac{1}{p}\tau^p, & 1 < p < 2, \\ \frac{p-1}{2}\tau^2 + o(\tau^2) < \frac{p-1}{2}\tau^2, & p \geq 2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Định lí dưới đây cho ta biết về mối liên hệ giữa mô đun trơn của không gian Banach E với mô đun lồi của E^* và ngược lại.

Định lý 1.2. (xem [30] trang 70) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó ta có*

$$a) \quad \rho_{X^*}(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_X(\varepsilon) : \varepsilon \in [0, 2]\right\}, \quad \tau > 0.$$

$$b) \quad \rho_X(\tau) = \sup\left\{\frac{\tau\varepsilon}{2} - \delta_{X^*}(\varepsilon) : \varepsilon \in [0, 2]\right\}, \quad \tau > 0.$$

Nhận xét 1.3. Từ Định lí 1.2, suy ra

$$\rho_0(E) = \frac{\varepsilon_0(E^*)}{2} \quad \text{và} \quad \rho_0(E^*) = \frac{\varepsilon_0(E)}{2},$$

trong đó $\varepsilon_0(E) = \sup\{\varepsilon : \delta_E(\varepsilon) = 0\}$, $\rho_0(E) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau}$.

Định nghĩa 1.7. Không gian Banach E được gọi là trơn đều nếu

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\rho_E(\tau)}{\tau} = 0.$$

Từ Nhận xét 1.3, ta có định lí dưới đây:

Định lý 1.3. (xem [30] trang 70) *Cho E là một không gian Banach. Khi đó ta có các khẳng định sau:*

a) *Nếu E là không gian trơn đều thì E^* là không gian lồi đều;*

b) *Nếu E là không gian lồi đều thì E^* là không gian trơn đều.*

Ví dụ 1.3. Mọi không gian Hilbert, không gian l^p hay $L^p(\Omega)$ với $1 < p < +\infty$ đều là không gian Banach lồi đều và trơn đều (xem [1]).

Định nghĩa 1.8. Không gian Banach E được gọi là q -trơn đều, nếu tồn tại hằng số $c > 0$ sao cho $\rho_E(t) \leq ct^q$ với mọi $t > 0$.

Ví dụ 1.4. Các không gian l^p và $L^p(\Omega)$ là $\min\{2, p\}$ -trơn đều với $1 < p < +\infty$ (xem [1]).

Định nghĩa 1.9. Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn, ánh xạ đa trị $J : E \longrightarrow 2^{E^*}$ xác định bởi

$$J(x) = \{f \in E^* : \langle x, f \rangle = \|x\|^2, \|x\| = \|f\|\}$$

được gọi là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E .

Chú ý 1.2. Trong không gian Hilbert, ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trùng với ánh xạ đồng nhất I .

Nhận xét 1.4. Trong không gian tuyến tính định chuẩn bất kì E , ta luôn có $J(x) \neq \emptyset$ với mọi $x \in E$, điều này suy ra trực tiếp từ hệ quả của Định lý Hahn - Banach.

Mệnh đề dưới đây đề cập đến một số tính chất đơn giản của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của không gian tuyến tính định chuẩn E .

Mệnh đề 1.3. (xem [1] trang 69) *Cho E là một không gian tuyến tính định chuẩn và J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của nó. Khi đó,*

- i) J là một ánh xạ lẻ, tức là $J(-x) = -J(x)$, $\forall x \in E$;
- ii) J là thuần nhất dương, tức là $J(\lambda x) = \lambda J(x)$, $\forall \lambda > 0$, $\forall x \in E$;
- iii) J bị chặn, tức là nếu D là một tập con bị chặn của E thì $J(D)$ là một tập hợp bị chặn trong E^* ;
- iv) Nếu E^* là lồi chặt thì J là đơn trị;
- v) J là đơn trị và liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của E khi và chỉ khi E là không gian Banach trơn đều.

Ví dụ 1.5. Xét không gian l^p , với $p > 1$. Vì không gian đối ngẫu l^q của không gian l^p là lồi đều, nên ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của l^p là đơn trị và dễ thấy nó được xác định như sau:

$$J(x) = \begin{cases} \theta & \text{nếu } x = \theta \\ \{\eta_n\} \in l^q & \text{nếu } x = \{\xi_n\} \neq \theta, \end{cases}$$

trong đó $\eta_k = |\xi_k|^{p-1} \text{sgn}(\xi_k) \|x\|^{2-p}$ với mọi $k \geq 1$.

Dưới đây, chúng tôi sẽ đề cập đến khái niệm ánh xạ co rút không giãn theo tia cùng với một số tính chất cơ bản của nó và đây cũng là ánh xạ thường xuyên được đề cập đến trong hầu hết các kết quả nghiên cứu của đề tài.

Định nghĩa 1.10. Cho E là một không gian Banach và C là một tập con lồi đóng của E . Một ánh xạ $Q_C : E \longrightarrow C$ được gọi là:

- a) co rút nếu $Q_C^2(x) = Q_C(x)$, $\forall x \in E$;
- b) co rút không giãn nếu Q_C là co rút và là một ánh xạ không giãn, tức là

$$\|Q_C(x) - Q_C(y)\| \leq \|x - y\|, \quad \forall x, y \in E;$$

- c) co rút không giãn theo tia nếu Q_C là một co rút không giãn và thỏa mãn tính chất

$$Q_C(Q_C(x) + t(x - Q_C(x))) = Q_C(x), \forall x \in E, t \in (0, 1).$$

Định nghĩa 1.11. Một tập con lồi đóng C của không gian Banach E được gọi là:

- a) co rút của E nếu tồn tại một ánh xạ co rút từ E lên C ;
- b) co rút và không giãn của E nếu tồn tại một ánh xạ co rút không giãn từ E lên C ;
- c) co rút và không giãn theo tia của E nếu tồn tại một ánh xạ co rút không giãn theo tia từ E lên C .

Mệnh đề 1.4. [1] Cho E là một không gian Banach lồi đều. Khi đó, mọi tập con lồi, đóng và khác rỗng C của E đều là tập con co rút của E .

Chú ý 1.3. Ánh xạ co rút từ E lên C trong Mệnh đề 1.4 chính là phép chiếu metric $P_C : E \rightarrow C$ được xác định bởi

$$\|x - P_C x\| = \inf_{u \in C} \|x - u\|, \text{ với mọi } x \in E.$$

Cuối cùng, trong mục này, chúng tôi đề cập đến khái niệm khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp trong không gian Banach.

Định nghĩa 1.12. Cho A và B là hai tập con của không gian Banach E . Khoảng cách Hausdorff giữa A và B được xác định bởi

$$\mathcal{H}(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\},$$

trong đó $\beta(A, B) = \sup_{u \in A} \inf_{v \in B} \|u - v\| = \sup_{u \in A} d(u, B)$.

1.2. Một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu

Định nghĩa 1.13. Cho E là một không gian Banach. Toán tử $A : D(A) \subset E \rightarrow 2^E$ được gọi là j -đơn điệu nếu với mọi $x, y \in D(A)$, tồn tại $j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle u - v, j(x - y) \rangle \geq 0, \forall u \in A(x), v \in A(y). \quad (1.3)$$

Chú ý 1.4. Trong không gian Hilbert khái niệm toán tử đơn điệu và toán tử j -đơn điệu trùng nhau.

Định nghĩa 1.14. Toán tử j -đơn điệu $A : D(A) \subset E \longrightarrow 2^E$ được gọi là m - j -đơn điệu nếu $R(I + \lambda A) = E$ với mọi $\lambda > 0$, ở đây $R(I + \lambda A)$ là miền ảnh của $I + \lambda A$ và I là toán tử đồng nhất trên E .

Chú ý 1.5. Nếu E là một không gian Hilbert thì khái niệm toán tử m - j -đơn điệu trùng với khái niệm toán tử đơn điệu cực đại.

Ví dụ 1.6. [55] Cho $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi chính thường nửa liên tục dưới. Khi đó, toán tử dưới vi phân

$$\partial f(x) = \{u \in H : f(y) - f(x) \geq \langle y - x, u \rangle, \forall y \in H\}$$

là một toán tử đơn điệu cực đại.

Định nghĩa 1.15. Cho $A : D(A) \subset E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu thỏa mãn điều kiện miền, tức là $\overline{D(A)} \subset \bigcap_{\lambda > 0} R(I + \lambda A)$. Khi đó, toán tử $J_r^A = (I + rA)^{-1}$ được gọi là toán tử giải của A .

1.2.1. Phương pháp điểm gần kề

Trong mục này, trước hết chúng tôi trình bày khái quát về phương pháp điểm gần kề cho phương trình với toán tử đơn điệu và toán tử j -đơn điệu.

Xét bài toán

$$\text{Xác định phần tử } x^* \in D(A) \text{ sao cho } A(x^*) \ni \theta, \quad (1.4)$$

với $A : D(A) \subset E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử m - j -đơn điệu.

Khi A là m - j -đơn điệu trong không gian Hilbert H , nghĩa là A là toán tử đơn điệu cực đại thì Rockafellar R. T. [57] đã xét phương pháp lặp

$$c_n A x_{n+1} + x_{n+1} \ni x_n, \quad x_0 \in H, \quad (1.5)$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$ và gọi là phương pháp điểm gần kề. Rockafellar cũng đã chỉ ra sự hội tụ yếu của dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) về một nghiệm của bài toán (1.4).

Kết quả của Rockafellar được mô tả trong định lí dưới đây:

Định lý 1.4. Nếu tồn tại $c > 0$ sao cho $c_n \geq c$ với mọi n , thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) hội tụ yếu về một nghiệm của phương trình $A(x) \ni \theta$.

Chú ý 1.6. Phương pháp điểm gần kề được Martinet B. đề xuất lần đầu tiên trong tài liệu [43] cho bài toán cực tiểu phiếm hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới $\psi : H \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ở dạng sau

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \psi(y) + \frac{1}{2c_n} \|x_n - y\|^2 \right\} \text{ với mọi } n \geq 1. \quad (1.6)$$

Chú ý 1.7. Năm 1991, Güler [32] đã xây dựng một ví dụ để chỉ ra phương pháp lặp (1.5) không phải lúc nào cũng hội tụ mạnh trong trường hợp tổng quát. Một ví dụ gần đây của các tác giả Bauschke, Matoušková và Reich [10] dựa trên sự kết hợp giữa phương pháp điểm tựa và ví dụ của Hundal [34] về sự hội tụ yếu của phương pháp chiếu luân phiên cho bài toán chấp nhận lồi, cũng chỉ ra rằng dãy lặp $\{x_n\}$ xác định bởi (1.5) chỉ hội tụ yếu mà không hội tụ theo chuẩn.

1.2.2. Phương pháp lặp kiểu Halpern

Kim và Xu [41], Xu [67] đã cải tiến phương pháp lặp Halpern cho bài toán xác định không điểm của toán tử m - j -đơn điệu A trong không gian Banach trơn đều hoặc không gian Banach phản xạ có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy ở dạng sau:

$$\begin{cases} x_0 = x \in E, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n, \end{cases} \quad (1.7)$$

trong đó $u \in \overline{D(A)}$ là một phần tử bất kỳ và $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$. Họ đã chỉ ra rằng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.7) hội tụ mạnh về một không điểm của A dựa trên các điều kiện sau:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, hoặc
- iv) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} \left| 1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \right| < \infty$.

Aoyama và cộng sự [6] đã nghiên cứu phương pháp lặp dưới đây trong không gian Banach lồi đều với chuẩn khả vi Gâteaux đều:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n, \end{cases} \quad (1.8)$$

trong đó A là một toán tử j -đơn điệu thỏa mãn $A^{-1}0 \neq \emptyset$ và $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$. Họ đã chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.8) hội tụ mạnh về một không điểm của A dựa trên các điều kiện i), ii) và iv).

Qin và Su [48] cũng đã nghiên cứu một cải tiến đơn giản của phương pháp lặp (1.7) cho bài toán xác định không điểm của toán tử m - j -đơn điệu A trong không gian Banach trơn đều hoặc không gian Banach phản xạ có ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc liên tục yếu theo dãy ở dạng sau:

$$\begin{cases} x_0 = x \in E, \\ y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) J_{r_n}^A x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n, \end{cases} \quad (1.9)$$

trong đó $u \in \overline{D(A)}$ là một phần tử bất kỳ, các dãy số $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ nằm trong $(0, 1)$. Họ đã chỉ ra rằng dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.9) hội tụ mạnh về một không điểm của A dựa trên các điều kiện i) và ii) đối với $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và điều kiện iii) đối với $\{r_n\}$.

1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm

Dựa trên phương pháp xấp xỉ mềm [44, 68], Chen và Zhu [27, 28] đã đề xuất phương pháp lặp dưới đây cho bài toán xác định không điểm của toán tử j -đơn điệu A :

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n. \end{cases} \quad (1.10)$$

Với các điều kiện i), ii) đối với $\{\alpha_n\}$ và iv) đối với $\{r_n\}$, họ đã chỉ ra rằng khi E là không gian Banach có ánh xạ đối ngẫu liên tục yếu theo dãy (xem [27]) hoặc khi E là không gian Banach trơn đều (xem [28]), thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.10) hội tụ mạnh về một không điểm của A .

J.S. Jung [36, 37] cũng đã nghiên cứu các phương pháp lặp dưới đây:

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n, \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n) y_n + \beta_n J_{r_n}^A y_n, \end{cases} \quad (1.11)$$

và

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ y_n = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n, \\ x_{n+1} = (1 - \beta_n) y_n + \beta_n y_n, \end{cases} \quad (1.12)$$

và đã chỉ ra sự hội tụ mạnh của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A trong không gian Banach phản xạ có chuẩn khả vi Gâteaux đều dựa trên các điều kiện i), ii) đối với $\{\alpha_n\}$, điều kiện iii) đối với $\{r_n\}$ và điều kiện $\beta_n \in [0, a)$ với $a \in (0, 1)$. Khi $\beta_n = 0$ với mọi n , thì $\{x_n\}$ xác định bởi (1.11) và (1.12) trở thành

$$\begin{cases} x_0 = x \in C, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^A x_n. \end{cases} \quad (1.13)$$

1.3. Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh

1.3.1. Khoảng cách Bregman và phép chiếu Bregman

Cho E là một không gian Banach và cho $f : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm số. Ta ký hiệu miền hữu hiệu $\text{dom} f$ là tập $\{x \in E : f(x) < +\infty\}$. Với mỗi $x \in \text{int dom} f$ và $y \in E$, ta ký hiệu $f'(x, y)$ là đạo hàm phải của f tại x theo hướng y , tức là

$$f'(x, y) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + ty) - f(x)}{t}.$$

Hàm f được gọi là khả vi Gâteaux tại x nếu giới hạn $\lim_{t \rightarrow 0} (f(x + ty) - f(x))/t$ tồn tại với mọi y . Trong trường hợp này $f'(x, y)$ trùng với $(\nabla f)(x)$, giá trị của gradient ∇f của f tại x . Hàm f được gọi là khả vi Fréchet tại x nếu giới hạn trên tồn tại đều trên tập $\|y\| = 1$. Hàm f được gọi là khả vi Fréchet đều trên tập con C of E nếu giới hạn trên tồn tại đều với mọi $x \in E$ và $\|y\| = 1$. Ta biết rằng nếu f là khả vi Gâteaux differentiable (khả vi Fréchet) trên $\text{int dom} f$, thì f liên tục và đạo hàm Gâteaux derivative ∇f của nó là liên tục norm-to-weak* (liên tục) trên $\text{int dom} f$ (xem [13]).

Cho $f : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm lồi, chính thường và nửa liên tục dưới. Cho $x \in \text{int dom} f$, dưới vi phân của f tại x được xác định bởi

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(x) + \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) \ \forall y \in E\},$$

và hàm liên hợp của f là $f^* : E^* \rightarrow (-\infty, +\infty]$ được xác định bởi

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{\langle x^*, x \rangle - f(x)\}.$$

Cho E là một không gian Banach phản xạ, một hàm $f : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ được gọi là Legendre nếu và chỉ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

L₁) Phần trong $\text{int dom } f$ của miền hữu hiệu của f khác rỗng, f khả vi Gâteaux trên $\text{int dom } f$ và $\text{dom } \nabla f = \text{int dom } f$;

L₂) Phần trong $\text{int dom } f^*$ của miền hữu hiệu của f^* khác rỗng, f^* khả vi Gâteaux trên $\text{int dom } f^*$ và $\text{dom } \nabla f^* = \text{int dom } f^*$.

Vì E là phản xạ, nên $(\partial f)^{-1} = \partial f^*$ (xem [13]). Do đó, từ các điều kiện L₁) và L₂), ta có các đẳng thức sau:

$$\nabla f = (\nabla f^*)^{-1}, \text{ ran } \nabla f = \text{dom } \nabla f^* = \text{int dom } f^*$$

và

$$\text{ran } \nabla f^* = \text{dom } \nabla f = \text{int dom } f,$$

trong đó $\text{ran } \nabla f$ là miền ảnh của ∇f .

Khi dưới vi phân của f là đơn trị, thì nó đồng nhất với $\partial f = \nabla f$ (xem [19]). Bauschke et al. (xem [8]) các điều kiện L₁) và L₂) cũng suy ra rằng các hàm f và f^* là lồi chặt trên phần trong của miền hữu hiệu tương ứng. Nếu X là một không gian Banach trơn và lồi chặt, thì $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|^p$, $1 < p < +\infty$ là hàm Legendre. Từ đây, ta luôn giả thiết rằng X là không gian Banach phản xạ.

Cho $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm lồi khả vi Gâteaux. Hàm $D_f : \text{dom } f \times \text{int dom } f \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$D_f(y, x) = f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle, \quad (1.14)$$

được gọi là khoảng cách Bregman tương ứng với f (xem [24]). Khoảng cách Bregman có hai tính chất quan trọng, đó là đẳng thức ba điểm: với bất kỳ $x \in \text{dom } f$ và $y, z \in \text{int dom } f$,

$$D_f(x, y) + D_f(y, z) - D_f(x, z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(y), x - y \rangle, \quad (1.15)$$

và đẳng thức bốn điểm: với bất kỳ $y, \omega \in \text{dom } f$ và $x, z \in \text{int dom } f$,

$$\begin{aligned} D_f(y, x) - D_f(y, z) - D_f(\omega, x) \\ + D_f(\omega, z) = \langle \nabla f(z) - \nabla f(x), y - \omega \rangle. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Cho $f : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm lồi và khả vi Gâteaux. Phép chiếu Bregman của $x \in \text{int dom } f$ lên tập con lồi, đóng và khác rỗng $C \subset \text{dom } f$ là vectơ duy nhất $\text{proj}_C^f(x) \in C$ thỏa mãn

$$D_f(\text{proj}_C^f(x), x) = \inf\{D_f(y, x) : y \in C\}.$$

Nếu X là một không gian Banach trơn và lồi chặt và $f(x) = \|x\|^2$ với mọi $x \in X$, thì $\nabla f(x) = 2Jx$ với mọi $x \in X$, trong đó J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc X vào 2^{X^*} , và do đó $D_f(x, y)$ trở thành $\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy \rangle + \|y\|^2$, với mọi $x, y \in E$, đây là hàm Lyapunov được xây dựng bởi Albert trong [5] và phép chiếu Bregman $\text{proj}_C^f(x)$ trở thành phép chiếu tổng quát $\Pi_C(x)$ được xác định bởi

$$\phi(\Pi_C(x), x) = \min_{y \in C} \phi(y, x).$$

Nếu $X = H$ là một không gian Hilbert, thì J là ánh xạ đồng nhất và do đó phép chiếu Bregman $\text{proj}_C^f(x)$ trở thành phép chiếu metric từ H lên C .

Cho $f : E \rightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm lồi và khả vi Gâteaux. Khi đó, f được gọi là:

- a) lồi hoàn toàn tại $x \in \text{int dom } f$ nếu các modul của tính lồi hoàn toàn của nó tại x , tức là hàm $v_f : \text{int dom } f \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$v_f(x, t) = \inf\{D_f(y, x) : y \in \text{dom } f, \|y - x\| = t\},$$

là dương với mọi $t > 0$;

- b) lồi hoàn toàn nếu nó là tổng lồi tại mọi $x \in \text{int dom } f$;
- c) lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn nếu $v_f(B, t)$ là dương với mọi tập con bị chặn B của X và $t > 0$, trong đó modul của tính lồi hoàn toàn của hàm f trên tập B là hàm $v_f : \text{int dom } f \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ xác định bởi

$$v_f(B, t) = \inf\{v_f(x, t) : x \in B \cap \text{int dom } f\}.$$

1.3.2. Ánh xạ Bregman không giãn mạnh

Cho C là một tập con lồi của $\text{int dom } f$ và cho T là một ánh xạ từ C vào chính nó. Một điểm p thuộc bao đóng của C được gọi là điểm bất động tiệm cận của T (xem [25], [49]) nếu C chứa một dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về một phần tử p sao cho $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$. Tập các điểm bất động tiệm cận của T được ký hiệu là $\hat{F}(T)$. Toán tử T được gọi là (tựa)Bregman không giãn mạnh (ký hiệu là BSNE) ứng với tập khác rỗng $\hat{F}(T)$ nếu

$$D_f(p, Tx) \leq D_f(p, x), \quad (1.17)$$

với mọi $p \in \hat{F}(T)$ và $x \in C$, và nếu $\{x_n\} \subset C$ là bị chặn, $p \in \hat{F}(T)$, và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (D_f(p, x_n) - D_f(p, Tx_n)) = 0, \quad (1.18)$$

ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(Tx_n, x_n) = 0. \quad (1.19)$$

Một toán tử $T : C \longrightarrow C$ được gọi là Bregman không giãn vững (ký hiệu là BFNE) nếu

$$\langle \nabla f(Tx) - \nabla f(Ty), Tx - Ty \rangle \leq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), Tx - Ty \rangle, \quad (1.20)$$

với mọi $x, y \in C$. Rõ ràng rằng, từ định nghĩa của khoảng cách Bregman (1.14) bất đẳng thức (1.20) tương đương với

$$D_f(Tx, Ty) + D_f(Ty, Tx) + D_f(Tx, x) + D_f(Ty, y) \leq D_f(Tx, y) + D_f(Ty, x). \quad (1.21)$$

Trong [53] (xem Bổ đề 1.3.2), Reich và cộng sự đã chứng minh rằng mọi toán tử BFNE T đều thỏa mãn $F(T) = \hat{F}(T)$ khi hàm Legendre f là khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của X . Trong trường hợp này, nếu T là toán tử BFNE, thì T là toán tử BSNE tương ứng với tập khác rỗng $F(T) = \hat{F}(T)$.

1.4. Một số bổ đề bổ trợ

Ta cần các bổ đề dưới đây trong việc chứng minh các kết quả chính được giới thiệu trong các chương sau của đề tài.

Bổ đề 1.1. [30] Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của không gian Banach phản xạ E và E thỏa mãn điều kiện của Opial. Giả sử $T : C \rightarrow E$ là một ánh xạ không giãn. Khi đó, ánh xạ $I - T$ là nửa đóng trên C .

Bổ đề 1.2. [7] Cho $A : D(A) \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu. Khi đó, với $\lambda, \mu > 0$ và $x \in E$, ta có

$$J_\lambda^A x = J_\mu^A \left(\frac{\mu}{\lambda} x + \left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right) J_\lambda^A x \right).$$

Bổ đề 1.3. [1] Cho E là một không gian Banach lồi đều. Khi đó, với mọi $x, y \in E$ với $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq R$ và với mọi $j_x \in J(x)$, $j_y \in J(y)$, ta có

$$\langle x - y, j_x - j_y \rangle \geq g(\|x - y\|)\|x - y\|,$$

trong đó $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện

$$g(0) = 0, \quad g(t) > 0 \text{ với mọi } t > 0 \text{ và } t \leq s \Rightarrow g(t) \leq g(s).$$

Bổ đề 1.4. [1] Cho E là một không gian Banach và cho J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trong E . Nếu E^* là không gian lồi đều, thì J là liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của E , tức là, với mọi $\varepsilon > 0$ và $K > 0$, tồn tại số $\delta > 0$ sao cho, nếu $\|x\| \leq K, \|y\| \leq K$ và $\|x - y\| < \delta$, thì

$$\|J(x) - J(y)\| < \varepsilon.$$

Bổ đề 1.5. [31] Cho C là một tập con lồi và khác rỗng của không gian Banach trơn E , D là một tập con khác rỗng của C và P là một ánh xạ co rút từ C lên D . Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

- a) P là ánh xạ co rút không giãn theo tia;
- b) $\langle x - Px, j(z - Px) \rangle \leq 0$ với mọi $x \in C, z \in D$;
- c) $\langle x - y, j(Px - Py) \rangle \geq \|Px - Py\|^2$ với mọi $x, y \in C$;

Bổ đề 1.6. [47] Cho E là một không gian Banach. Với mọi $x, y \in E$, ta có

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle,$$

với mọi $j(x + y) \in J(x + y)$.

Bổ đề 1.7. [29] Cho $A : D(A) \subset E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu và $r, t > 0$. Nếu E là không gian Banach lồi đều, thì tồn tại một hàm số liên tục, tăng ngặt và lồi $\varphi : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ với $\varphi(0) = 0$ sao cho

$$\|J_r^A x - J_r^A y\|^2 \leq \|x - y\|^2 - \varphi(\|(I - J_r^A)x - (I - J_r^A)y\|),$$

với mọi $x, y \in R(I + rA)$ với $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq t$.

Nhắc lại, một ánh xạ $F : E \longrightarrow E$ được gọi là δ - j -đơn điệu mạnh nếu với mọi $x, y \in E$ tồn tại $j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x - y) \rangle \geq \delta \|x - y\|^2$$

với $\delta \in (0, 1)$. Ánh xạ $F : E \longrightarrow E$ được gọi là λ -giả co chặt [16] nếu với mỗi $x, y \in E$ tồn tại $j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2 - \lambda \|x - y - (F(x) - F(y))\|^2$$

với $\lambda \in (0, 1)$ và F được gọi là giả co nếu với mỗi $x, y \in E$ tồn tại $j(x - y) \in J(x - y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x - y) \rangle \leq \|x - y\|^2.$$

Bổ đề 1.8. [21] Cho E là một không gian Banach thực trơn và $F : E \longrightarrow E$ là một ánh xạ. Nếu F là δ - j -đơn điệu mạnh và λ -giả co chặt với $\delta + \lambda > 1$, thì với mọi $\tau \in (0, 1]$, $I - \tau F$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \tau(1 - \sqrt{\frac{1 - \delta}{\lambda}})$.

Bổ đề 1.9. [70] Cho E là một không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều, C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E , $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ là một ánh xạ liên tục, $T : C \longrightarrow C$ là một ánh xạ không giãn và $\{x_n\}$ là một dãy bị chặn trong C sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$. Giả sử $\{z_t\} \subset C$ được xác định bởi $z_t = tfz_t + (1 - t)Tz_t, t \in (0, 1)$ thỏa mãn $z_t \rightarrow z$ khi $t \rightarrow 0$. Khi đó $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle fz - z, j(x_n - z) \rangle \leq 0$.

Bổ đề 1.10 (xem [2], Định lý 1.8). Nếu $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ khả vi Fréchet đều, thì f liên tục đều trên X .

Bổ đề 1.11 (xem [50], Mệnh đề 2.1). Nếu $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của X , thì ∇f liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của X từ tôpô mạnh của X vào tôpô mạnh của X^* .

Bổ đề 1.12 (xem [54], Mệnh đề 2.2). Nếu $x \in \text{int dom } f$, thì các khẳng định dưới đây là tương đương:

- i) Hàm f là lồi hoàn toàn tại x ;
- ii) Với bất kỳ dãy $\{y_n\} \subset \text{dom } f$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Df(y_n, x) = 0,$$

ta đều có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - x\| = 0$.

Nhắc lại rằng, một hàm f được gọi là ổn định dãy (xem [19]) nếu với hai dãy bất kỳ $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ thuộc $\text{int dom } f$ và $\text{dom } f$, tương ứng, sao cho dãy thứ nhất bị chặn và $\lim_{n \rightarrow \infty} Df(y_n, x_n) = 0$, thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|y_n - x_n\| = 0$.

Bổ đề 1.13 (xem [18], Bổ đề 2.1.2). Hàm f là lồi hoàn toàn trên mỗi tập con bị chặn nếu và chỉ nếu nó là ổn định dãy.

Bổ đề 1.14 (xem [19], Hệ quả 4.4). Giả sử f khả vi Gâteaux và lồi hoàn toàn trên $\text{int dom } f$. Cho $x \in \text{int dom } f$ và cho $K \subset \text{int dom } f$ là một tập khác rỗng, lồi và đóng. Nếu $\bar{x} \in K$, thì các khẳng định dưới đây là tương đương:

- i) $\bar{x} = \text{proj}_K^f(x)$;

ii) $\bar{x}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(z), z - y \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K;$$

iii) $\bar{x}$ là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức

$$D_f(y, z) + D_f(z, x) \leq D_f(x, y) \quad \forall y \in K.$$

Bổ đề 1.15 (xem [51], Bổ đề 3.1). Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả vi Gâteaux và lồi hoàn toàn. Nếu $x_0 \in X$ và dãy $\{D_f(x_n, x_0)\}$ bị chặn, thì dãy $\{x_n\}$ cũng bị chặn.

Bổ đề 1.16. [67] Cho $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ và $\{\sigma_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện:

$$\text{i) } a_{n+1} \leq (1 - b_n)a_n + b_nc_n + \sigma_n, \quad b_n < 1,$$

$$\text{ii) } \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq 0,$$

$$\text{iii) } \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n < \infty.$$

Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Bổ đề 1.17. [42] Cho $\{s_n\}$ là một dãy số thực không tăng, theo nghĩa tồn tại một dãy con $\{s_{n_k}\}$ sao cho

$$s_{n_k} \leq s_{n_k+1}, \quad \forall k \geq 0.$$

Với $n > n_0$ xác định dãy các số nguyên dương $\{\tau(n)\}$ như sau

$$\tau(n) = \max\{n_0 \leq k \leq n : s_k < s_{k+1}\}.$$

Khi đó $\tau(n) \rightarrow \infty$ khi $n \rightarrow \infty$ với $n > n_0$,

$$\max\{s_{\tau(n)}, s_n\} \leq s_{\tau(n)+1}.$$

Chương 2

Về bài toán Xấp xỉ không điểm của toán tử kiểu đơn điệu

Trong chương này đề tài tập trung trình bày lại các kết quả nghiên cứu đạt được dựa trên sự kết hợp giữa phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ gắn kết hay phương pháp prox-Tikhonov với phương pháp lặp luân phiên cho bài toán tìm không điểm của một toán tử j -đơn điệu, không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng đề cập đến một số ứng dụng cho các lớp bài toán khác như: Bài toán tìm điểm cực tiểu chung của hai phiếm hàm lồi, bài toán chấp nhận lồi, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng. Cùng với đó, chúng tôi cũng giới thiệu một ví dụ số được lập trình và thử nghiệm số dựa trên phần mềm MATLAB nhằm minh họa thêm cho các phương pháp lặp.

2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép

Năm 2012, L.-C. Ceng và các cộng sự đã đề xuất phương pháp lặp mới để xác định không điểm của một toán tử m - j -đơn điệu [22]. Họ đã chứng minh định lý sau:

Định lý 2.1. [22] *Cho E là một không gian Banach trun đều, A là một toán tử m - j -đơn điệu trong E với $C = A^{-1}(0) \neq \emptyset$ và cho $f : E \longrightarrow K = \overline{D(A)}$ là một ánh xạ co. Giả sử rằng $F : E \longrightarrow E$ là δ - j -đơn điệu mạnh và λ -giả co chặt với $\delta + \lambda > 1$. Cho trước các dãy $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ trong $[0, 1]$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1]$ và $\{r_n\} \subset [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$, giả sử rằng các điều kiện sau đúng:*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \text{ và } \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty;$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \mu_n}{\beta_n} = 0;$$

(iii) $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$, với $a, b \in (0, 1)$;

(iv) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$,
 $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$.

Khi đó với bất kỳ $x_0 \in E$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \\ x_{n+1} = \beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n) [J_{r_n} y_n - \lambda_n \mu_n F(J_{r_n} y_n)], \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

hội tụ mạnh về một không điểm p của A , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VI^*(I - f, C)$, tức là

$$\langle (I - f)p, j(p - u) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

Ta có định lý sau [65]:

Định lý 2.2. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều, A là một toán tử m - j -đơn điệu trong E với $C = A^{-1}(0) \neq \emptyset$ và cho $f : E \longrightarrow K = \overline{D(A)}$ là một ánh xạ co với hệ số co $\beta \in [0, 1)$. Giả sử $F : E \longrightarrow E$ là δ - j -đơn điệu mạnh và λ -giả co chặt với $\delta + \lambda > 1$. Cho trước các dãy số $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ trong $[0, 1]$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1]$ và $\{r_n\} \subset [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$, giả sử rằng các điều kiện sau đúng:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \mu_n}{\beta_n} = 0$;

(iii) $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$, với $a, b \in (0, 1)$;

Khi đó, với bất kỳ $x_0 \in E$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \\ x_{n+1} = \beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n) [J_{r_n} y_n - \lambda_n \mu_n F(J_{r_n} y_n)], \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

hội tụ mạnh về một không điểm p của A , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VI^*(I - f, C)$, tức là

$$\langle (I - f)p, j(p - u) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

Chứng minh. Trước hết, ta chỉ ra $\{x_n\}$ là bị chặn. Thật vậy, cố định $u \in C$, ta có

$$\begin{aligned}\|y_n - u\| &= \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)J_{r_n}x_n - u\| \\ &= \|\alpha_n(x_n - u) + (1 - \alpha_n)(J_{r_n}x_n - u)\| \\ &\leq \alpha_n\|x_n - u\| + (1 - \alpha_n)\|J_{r_n}x_n - J_{r_n}u\| \\ &\leq \|x_n - u\|.\end{aligned}$$

Do đó, từ Bổ đề 1.8, ta nhận được

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - u\| &= \|\beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n)[J_{r_n}y_n - \lambda_n \mu_n F(J_{r_n}y_n)] - u\| \\ &\leq \beta_n \|f(x_n) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) \|\lambda_n(I - \mu_n F)J_{r_n}y_n + (1 - \lambda_n)J_{r_n}y_n - u\| \\ &\leq \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) [\lambda_n \|(I - \mu_n F)J_{r_n}y_n - u\| \\ &\quad + (1 - \lambda_n) \|J_{r_n}y_n - u\|] \\ &\leq \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) [\lambda_n \|(I - \mu_n F)J_{r_n}y_n - (I - \mu_n F)u\| \\ &\quad + \lambda_n \mu_n \|F(u)\| + (1 - \lambda_n) \|J_{r_n}y_n - u\|] \\ &\leq \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) \left[\lambda_n \left(1 - \mu_n \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \delta}{\lambda}}\right)\right) \|J_{r_n}y_n - u\| \right. \\ &\quad \left. + \lambda_n \mu_n \|F(u)\| + (1 - \lambda_n) \|J_{r_n}y_n - u\| \right] \\ &= \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) \left[\left(1 - \lambda_n \mu_n \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \delta}{\lambda}}\right)\right) \|J_{r_n}y_n - u\| + \lambda_n \mu_n \|F(u)\| \right] \\ &\leq \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) \max \left\{ \|J_{r_n}y_n - u\|, \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \delta}{\lambda}}\right)^{-1} \|F(u)\| \right\} \\ &\leq \beta_n \beta \|x_n - u\| + \beta_n \|f(u) - u\| \\ &\quad + (1 - \beta_n) \max \left\{ \|x_n - u\|, \left(1 - \sqrt{\frac{1 - \delta}{\lambda}}\right)^{-1} \|F(u)\| \right\} \\ &\leq \beta_n \|f(u) - u\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - (1 - \beta)\beta_n) \max \left\{ \|x_n - u\|, (1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\lambda}})^{-1} \|F(u)\| \right\} \\
& \leq \max \left\{ \|x_n - u\|, \frac{\|f(u) - u\|}{1 - \beta}, (1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\lambda}})^{-1} \|F(u)\| \right\}.
\end{aligned}$$

Bằng quy nạp toán học, ta thu được

$$\|x_n - u\| \leq \max \left\{ \|x_0 - u\|, \frac{\|f(u) - u\|}{1 - \beta}, (1 - \sqrt{\frac{1-\delta}{\lambda}})^{-1} \|F(u)\| \right\}, \quad \forall n \geq 0.$$

Suy ra, $\{x_n\}$ bị chặn.

Giả sử p là nghiệm duy nhất của $VI^*(I - f, C)$, tức là

$$\langle (I - f)p, j(p - u) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C,$$

từ Bổ đề 1.6, ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 & \leq (1 - \beta_n)^2 \|J_{r_n} y_n - p\|^2 + 2\beta_n \langle f(x_n) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \quad - 2(1 - \beta_n) \lambda_n \mu_n \langle F(J_{r_n} y_n), j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& = (1 - \beta_n)^2 \|y_n - p\|^2 + 2\beta_n \langle f(x_n) - f(p), j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \quad + 2\beta_n \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \quad - 2(1 - \beta_n) \lambda_n \mu_n \langle F(J_{r_n} y_n), j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \leq (1 - \beta_n)^2 \|y_n - p\|^2 + \beta_n \beta (\|x_n - p\|^2 + \|x_{n+1} - p\|^2) \\
& \quad + 2\beta_n \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \quad + 2(1 - \beta_n) \lambda_n \mu_n \|F(J_{r_n} y_n)\| \cdot \|x_{n+1} - p\|,
\end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - p\|^2 & \leq \frac{1}{1 - \beta_n \beta} ((1 - \beta_n)^2 \|y_n - p\|^2 + \beta_n \beta \|x_n - p\|^2) \\
& \quad + \frac{2\beta_n}{1 - \beta_n \beta} \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \\
& \quad + \frac{2\lambda_n \mu_n}{1 - \beta_n \beta} \|F(J_{r_n} y_n)\| \cdot \|x_{n+1} - p\|.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Từ Bổ đề 1.7, ta có

$$\begin{aligned}
\|y_n - p\|^2 & = \|\alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n - p\|^2 \\
& \leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n) \|J_{r_n} x_n - p\|^2 \\
& \leq \alpha_n \|x_n - p\|^2 + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\|^2 \\
& \quad - (1 - \alpha_n) \varphi(\|x_n - J_{r_n} x_n\|) \\
& \leq \|x_n - p\|^2 - (1 - b) \varphi(\|x_n - J_{r_n} x_n\|).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4), ta nhận được

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - p\|^2 &\leq \frac{1 - (2 - \beta)\beta_n}{1 - \beta_n\beta} \|x_n - p\|^2 \\ &\quad + \frac{2\beta_n}{1 - \beta_n\beta} \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \\ &\quad + \frac{M}{1 - \beta} \beta_n^2 + \frac{M}{1 - \beta} \lambda_n \mu_n \\ &\quad - (1 - \beta_n)^2 (1 - b) \varphi(\|x_n - J_{r_n} x_n\|),\end{aligned}$$

trong đó $M > \max\{\|x_n - p\|^2, 2\|F(J_{r_n} y_n)\| \cdot \|x_{n+1} - p\|\}$. Ta có bất đẳng thức sau

$$s_{n+1} \leq (1 - b_n)s_n + b_n c_n - \sigma_n, \quad (2.5)$$

trong đó $s_n = \|x_n - p\|^2$, $b_n = \frac{2(1 - \beta)\beta_n}{1 - \beta_n\beta}$,

$$c_n = \frac{M(1 - \beta\beta_n)}{2(1 - \beta)^2} \left(\beta_n + \frac{\lambda_n \mu_n}{\beta_n} \right) + \frac{1}{1 - \beta} \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle,$$

và

$$\sigma_n = (1 - \beta_n)^2 (1 - b) \varphi(\|x_n - J_{r_n} x_n\|).$$

Ta sẽ chỉ ra $s_n \rightarrow 0$ bằng cách xét hai trường hợp sau.

Trường hợp 1. $\{s_n\}$ là dãy đơn điệu tăng theo nghĩa tồn tại $N_0 \geq 0$ sao cho $\{s_n\}$ là tăng với $n \geq N_0$ và do đó $\{s_n\}$ hội tụ. Khi đó, từ (2.5) ta có

$$0 \leq \sigma_n \leq (s_n - s_{n+1}) + b_n(c_n - s_n) \rightarrow 0,$$

suy ra

$$\|x_n - J_{r_n} x_n\| \rightarrow 0. \quad (2.6)$$

Ta chỉ ra

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, j(x_n - p) \rangle \leq 0. \quad (2.7)$$

Thật vậy, đặt $x_{t,n} = tf(x_{t,n}) + (1 - t)[J_{r_n} x_{t,n} - \theta_t F(J_{r_n} x_{t,n})]$. Khi đó, từ Định lý 3.1 trong [22], $x_{t,n}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của $VI^*(I - f, C)$ khi $t \rightarrow 0$. Ta có

$$x_{t,n} - x_n = t(f(x_{t,n}) - x_n) + (1 - t)(J_{r_n} x_{t,n} - x_n) - (1 - t)\theta_t F(J_{r_n} x_{t,n}).$$

Từ Bổ đề 1.6, ta nhận được

$$\|x_{t,n} - x_n\|^2 \leq (1 - t)^2 \|J_{r_n} x_{t,n} - x_n\|^2 + 2t \langle f(x_{t,n}) - x_n, j(x_{t,n} - x_n) \rangle$$

$$\begin{aligned}
& -2(1-t)\theta_t \langle F(J_{r_n}x_{t,n}), j(x_{t,n} - x_n) \rangle \\
& \leq (1-t)^2 (\|J_{r_n}x_{t,n} - J_{r_n}x_n\|^2 + \|J_{r_n}x_n - x_n\|^2) \\
& \quad + 2t \langle f(x_{t,n}) - x_{t,n}, j(x_{t,n} - x_n) \rangle + 2t\|x_{t,n} - x_n\|^2 \\
& \quad + 2\theta_t \|F(J_{r_n}x_{t,n})\| \cdot \|x_{t,n} - x_n\| \\
& \leq (1+t^2)\|x_{t,n} - x_n\|^2 \\
& \quad + \|J_{r_n}x_n - x_n\| (2\|x_{t,n} - x_n\| + \|J_{r_n}x_n - x_n\|) \\
& \quad + 2t \langle f(x_{t,n}) - x_{t,n}, j(x_{t,n} - x_n) \rangle + 2\theta_t \|F(J_{r_n}x_{t,n})\| \cdot \|x_{t,n} - x_n\|.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
& \langle f(x_{t,n}) - x_{t,n}, j(x_{t,n} - x_n) \rangle \\
& \leq \frac{t}{2} \|x_{t,n} - x_n\|^2 \\
& \quad + \frac{1}{2t} \|J_{r_n}x_n - x_n\| (2\|x_{t,n} - x_n\| + \|J_{r_n}x_n - x_n\|) \\
& \quad + \frac{\theta_t}{t} \|F(J_{r_n}x_{t,n})\| \cdot \|x_{t,n} - x_n\|.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Từ (2.6) và trong (2.8) cho $n \rightarrow \infty$, ta thu được

$$\begin{aligned}
& \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x_{t,n}) - x_{t,n}, j(x_{t,n} - x_n) \rangle \\
& \leq \frac{t}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{t,n} - x_n\|^2 \\
& \quad + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_t}{t} \|F(J_{r_n}x_{t,n})\| \cdot \|x_{t,n} - x_n\| \\
& \leq \left(\frac{t}{2} + \frac{\theta_t}{t} \right) M_1,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

trong đó $M_1 = \max\{\sup_n \|x_{t,n} - x_n\|^2, \sup_n \|F(J_{r_n}x_{t,n})\| \cdot \|x_{t,n} - x_n\|\} < \infty$ với mọi $t \in (0, a]$ (xem [22], Định lý 3.1). Lấy lim sup khi $t \rightarrow 0$ trong (2.9) và từ tính liên tục đều theo chuẩn của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên mỗi tập con bị chặn của E , ta nhận được (2.7).

Ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| & \leq \|x_{n+1} - J_{r_n}y_n\| + \|J_{r_n}y_n - J_{r_n}x_n\| + \|x_n - J_{r_n}x_n\| \\
& \leq K\beta_n + \|y_n - x_n\| + \|x_n - J_{r_n}x_n\| \\
& = K\beta_n + (1 - \alpha_n)\|x_n - J_{r_n}x_n\| + \|x_n - J_{r_n}x_n\| \\
& \leq K\beta_n + (2 - a)\|x_n - J_{r_n}x_n\| \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

trong đó $K = \sup_n \{\|f(x_n)\| + \|J_{r_n} y_n\|\} + F(J_{r_n} y_n)\|$. Do đó,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0. \quad (2.11)$$

Từ (2.7) và từ tính liên tục đều theo chuẩn của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên mỗi tập con bị chặn của E , ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, j(x_{n+1} - p) \rangle \leq 0. \quad (2.12)$$

Do đó, từ giả thiết ta nhận được $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n \leq 0$. Áp dụng Bổ đề 1.16, suy ra $s_n \rightarrow 0$.

Trường hợp 2. $\{s_n\}$ không đơn điệu tăng từ một chỉ số nào đó. Do đó, tồn tại một dãy con $\{s_{n_k}\}$ của $\{s_n\}$ sao cho $s_{n_k} \leq s_{n_k+1}$ với mọi $k \geq 0$. Từ Bổ đề 1.17, ta có thể xác định dãy con $\{s_{\tau(n)}\}$ sao cho

$$\max\{s_{\tau(n)}, s_n\} \leq s_{\tau(n)+1}, \forall n \geq n_0. \quad (2.13)$$

Từ (2.5), ta có

$$0 \leq \sigma_{\tau(n)} \leq b_{\tau(n)}(c_{\tau(n)} - s_{\tau(n)}) \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

do đó $\sigma_{\tau(n)} \rightarrow 0$. Bởi lập luận tương tự như Trường hợp 1, ta nhận được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, j(x_{\tau(n)+1} - p) \rangle \leq 0,$$

hay $\limsup_{n \rightarrow \infty} c_{\tau(n)} \leq 0$. Từ (2.14), suy ra $\limsup_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} \leq 0$. Do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{\tau(n)} = 0$.

Tương tự (2.10), ta có

$$\|x_{\tau(n)+1} - x_{\tau(n)}\| \rightarrow 0.$$

Do đó, từ tính bị chặn của $\{x_n\}$, ta thu được

$$\begin{aligned} |s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)}| &= |\|x_{\tau(n)+1} - p\|^2 - \|x_{\tau(n)} - p\|^2| \\ &\leq \|x_{\tau(n)+1} - x_{\tau(n)}\|(\|x_{\tau(n)+1} - p\| + \|x_{\tau(n)} - p\|) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Vì vậy, $|s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)}| \rightarrow 0$. Từ (2.13), với mọi $n \geq n_0$, ta có

$$0 \leq s_n \leq s_{\tau(n)+1} = s_{\tau(n)} + (s_{\tau(n)+1} - s_{\tau(n)}) \rightarrow 0,$$

suy ra $s_n \rightarrow 0$.

Tóm lại, ta thu được $s_n \rightarrow 0$ trong cả hai trường hợp, tức là $x_n \rightarrow p$.

Định lý được chứng minh. □

Ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.1. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều, A là một toán tử m - j -đơn điệu trong E với $C = A^{-1}(0) \neq \emptyset$ và cho $f : E \longrightarrow K = \overline{D(A)}$ là một ánh xạ co với hệ số co $\beta \in [0, 1]$. Cho trước các dãy số $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1]$ và $\{r_n\} \subset [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$, giả sử các điều kiện sau đúng:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty$;
- (ii) $\{\alpha_n\} \subset [a, b]$, với $a, b \in (0, 1)$;

Khi đó, với bất kỳ $x_0 \in E$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \\ x_{n+1} = \beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n) J_{r_n} y_n, \quad \forall n \geq 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

hội tụ mạnh về một không điểm p của A , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VI^*(I - f, C)$, tức là

$$\langle (I - f)p, j(p - u) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.2 với $\lambda_n = 0$ hoặc $\mu_n = 0$ với mọi n , ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

Ví dụ 2.1. Xét bài toán tìm một phần tử

$$x^* \in S = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} \Theta(x),$$

trong đó Θ được xác định bởi

$$\Theta(x) = \langle Qx, x \rangle + \langle B, x \rangle + C, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3,$$

với

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (-4 \quad -4 \quad 4), \quad \text{and } C \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Vì $\nabla^2 \Theta = 2Q$ là ma trận nửa xác định dương, nên Θ là một hàm lồi. Do đó, $\nabla \Theta$ là một toán tử đơn điệu cực đại trong $\mathbb{R}^3$ và bài toán trên tương đương với bài toán sau:

Xác định một phần tử $x^* \in S = (\nabla \Theta)^{-1}(0)$.

Dễ dàng thấy rằng

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 2\}.$$

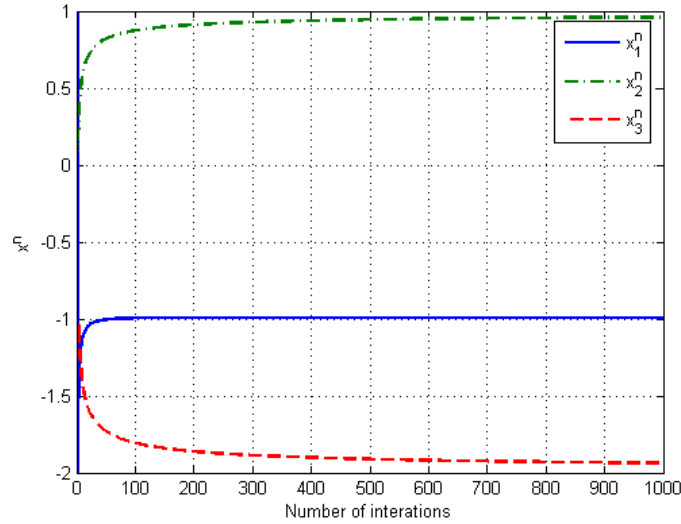
Ta có thể thấy rằng $\lambda_n = \mu_n = \beta_n = n^{-1/2}$, $\alpha_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{n}}$ và $r_n = n$ với mọi $n \geq 1$ thỏa mãn tất cả các điều kiện trong Định lý 2.2, nhưng các điều kiện $\sum_{n=1}^{\infty} |r_{n+1} - r_n| < \infty$ and $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\mu_{n+1} - \mu_n| < \infty$ không được thỏa mãn.

Chú ý 2.1. Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.2) hội tụ mạnh về một không điểm p của $\nabla\Theta$, là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân

$$\langle p - v, p - u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

Từ tính chất của phép chiếu metric, ta có $p = P_S v = (-1, 1, -2)$, trong đó P_C là phép chiếu metric từ $\mathbb{R}^3$ lên S .

Áp dụng phương pháp lặp (2.2), với $f(x) = v = (-2, 0, -1)$ và $F(x) = \frac{3}{4}x$ ($\delta = 3/4$, $\lambda = 1/2$) với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ và với $x^0 = (1, 0, -1)$, ta nhận được hình vẽ sau:



Hình 2.1: $x^{1000} = (-0.994144, 0.960298, -1.937520)$

2.2. Phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

2.2.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ

Xét bài toán sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset, \quad (2.16)$$

trong đó $A : D(A) \longrightarrow 2^E$ và $B : D(A) \longrightarrow 2^E$ là hai toán tử j -đơn điệu.

Năm 1930, von Neumann [45] đã chỉ ra rằng với hai nửa không gian con đóng C_1 và C_2 của không gian Hilbert H , thì dãy chiếu luân phiên

$$H \ni x_0 \mapsto x_1 = P_{C_1}x_0 \mapsto x_2 = P_{C_2}x_1 \mapsto x_3 = P_{C_1}x_2 \mapsto \dots, \quad (2.17)$$

hội tụ mạnh về một phần tử thuộc giao của C_1 và C_2 , mà phần tử này gần phần tử xuất phát x_0 nhất. Năm 1965, Bregman [14] cũng đã chỉ ra rằng với hai tập con lồi và đóng bất kỳ C_1 và C_2 của H , sao cho $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, thì dãy $\{x_n\}$ xác định bởi phương pháp chiếu luân phiên (2.17) hội tụ yếu về một phần tử trong $C_1 \cap C_2$. Tuy nhiên, trong trường hợp này $\{x_n\}$ không hội tụ mạnh, vấn đề này đã được H. Hundal trả lời trong tài liệu [34].

Khi A và B là hai toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert H , năm 2005 dựa trên phương pháp chiếu luân phiên của von Neumann [45] và Bregmann [14], Bauschke cùng cộng sự [11] đã chỉ ra dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$x_{2n+1} = J_\lambda^A(x_{2n}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

$$x_{2n} = J_\lambda^B(x_{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

với $\lambda > 0$, hội tụ yếu về một phần tử của $F(J_\lambda^A J_\lambda^B)$.

Trước hết, ta cần định lý sau:

Định lý 2.3. [35] *Cho E là một không gian Banach phản xạ với chuẩn khả vi Gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E đều có tính chất điểm bất động đối với các ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng của E và T là một ánh xạ không giãn từ C vào chính nó với $F(T) \neq \emptyset$. Khi đó, dãy $\{x_t\}$ xác định bởi $x_t = tfx_t + (1-t)Tx_t$ với $f : C \longrightarrow C$ là một ánh xạ co và $t \in (0, 1)$, hội tụ mạnh về một phần tử $x^* \in F(T)$ thỏa mãn tính chất $Q_{F(T)}f(x^*) = x^*$.*

Chú ý 2.2. Trong Định lý 2.3, nếu $f(x) = u$ với mọi $x \in C$, thì $x^* = Q_{F(T)}u$, trong đó $Q_{F(T)} : C \longrightarrow F(T)$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên $F(T)$.

Các tác giả J.K. Kim và T.M. Tuyền đã chứng minh định lý sau:

Định lý 2.4. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rB)$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq \varepsilon$, $\gamma_n \geq \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ và với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$,

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$y_n = J_{\beta_n}^A x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.20)$$

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

trong đó u và x_0 là các phần tử bất kỳ trong C . Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, trong đó $Q_S : C \longrightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Chứng minh. Chứng minh của định lý này được chia thành các bước sau:

Bước 1. Dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Lấy $p \in S$, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n - p\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|J_{\gamma_n}^B y_n - J_{\gamma_n}^B p\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|y_n - p\| \\ &= \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|J_{\beta_n}^A x_n - J_{\beta_n}^A p\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_n - p\| \\ &\leq \max\{\|u - p\|, \|x_n - p\|\} \\ &\vdots \\ &\leq \max\{\|u - p\|, \|x_0 - p\|\}, \end{aligned}$$

điều này suy ra rằng dãy $\{x_n\}$ là bị chặn. Do đó, dãy $\{y_n\}$ cũng bị chặn.

Bước 2. Các dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là chính qui tiệm cận.

Từ (2.21), ta có

$$x_{n+2} = \alpha_{n+1}u + (1 - \alpha_{n+1})J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \|u\| \\ &\quad + \|(1 - \alpha_{n+1})J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - (1 - \alpha_n)J_{\gamma_n}^B y_n\| \\ &\leq |\alpha_{n+1} - \alpha_n| (\|u\| + \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\|) \\ &\quad + (1 - \alpha_n) \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \\ &\leq M |\alpha_{n+1} - \alpha_n| + (1 - \alpha_n) \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\|, \end{aligned} \quad (2.22)$$

trong đó $M = \|u\| + \sup_n \{\|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\|\}$.

Trường hợp 1. Nếu $\gamma_{n+1} \geq \gamma_n$, từ Bổ đề 1.2, ta có

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| &= \|J_{\gamma_n}^B (\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} y_{n+1} + (1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}) J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}) - J_{\gamma_n}^B y_n\| \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + |1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}| (\|y_{n+1}\| + \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\|) \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + K |\gamma_{n+1} - \gamma_n|, \end{aligned} \quad (2.23)$$

với $K = \frac{\sup_n \{\|y_{n+1}\| + \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1}\|\}}{\varepsilon}$.

Trường hợp 2. Nếu $\gamma_n < \gamma_{n+1}$, từ Bổ đề 1.2, ta có

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| &= \|J_{\gamma_{n+1}}^B y_{n+1} - J_{\gamma_{n+1}}^B (\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} y_n + (1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}) J_{\gamma_n}^B y_n)\| \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + |1 - \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}| (\|y_n\| + \|J_{\gamma_n}^B y_n\|) \\ &\leq \|y_{n+1} - y_n\| + K |\gamma_{n+1} - \gamma_n|. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Từ (2.22), (2.23) và (2.24), ta nhận được

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n) \|y_{n+1} - y_n\| + K |\gamma_{n+1} - \gamma_n| \\ &\quad + M |\alpha_{n+1} - \alpha_n|. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Bây giờ, ta đánh giá $\|y_{n+1} - y_n\|$. Ta có

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &= \|J_{\beta_{n+1}}^A x_{n+1} - J_{\beta_n}^A x_n\| \\ &= \|J_{\beta_n}^A (\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} x_{n+1} + (1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}) y_{n+1}) - J_{\beta_n}^A x_n\| \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + |1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}| (\|y_{n+1}\| + \|x_{n+1}\|) \\ &\leq \|x_{n+1} - x_n\| + L |\beta_{n+1} - \beta_n|, \end{aligned} \quad (2.26)$$

với $L = \frac{\sup_n \{\|y_n\| + \|x_n\|\}}{\varepsilon}$.

Từ (2.25) và (2.26), ta thu được

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n)\|x_{n+1} - x_n\| + L|\beta_{n+1} - \beta_n| \\ &\quad + K|\gamma_{n+1} - \gamma_n| + M|\alpha_{n+1} - \alpha_n|. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Từ Bổ đề 1.16, $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$. Do đó, từ (2.26), ta cũng có $\|y_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$.

Bước 3. $\|x_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0$.

Phương trình (2.20) có thể viết lại dưới dạng

$$\beta_n A y_n + y_n \ni x_n.$$

Từ tính j -đơn điệu của A , ta nhận được

$$\langle x_n - y_n, j(y_n - p) \rangle \geq 0. \quad (2.28)$$

Do đó,

$$\langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - p) \rangle \leq \langle x_n - x_{n+1}, j(y_n - p) \rangle \leq L_1 \|x_{n+1} - x_n\|, \quad (2.29)$$

với $L_1 = \sup_n \{\|y_n\|\} + \|p\|$.

Phương trình (2.21) có thể viết lại dưới dạng

$$\gamma_n B z_n + z_n \ni y_n, \quad z_n = \frac{x_{n+1} - \alpha_n u}{1 - \alpha_n}.$$

Từ tính j -đơn điệu của B , ta nhận được

$$\langle y_n - z_n, j(z_n - p) \rangle \geq 0.$$

Do đó,

$$\langle y_n - x_{n+1} + \alpha_n(u - y_n), j(p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p)) \rangle \leq 0,$$

suy ra

$$\begin{aligned} \langle y_n - x_{n+1}, j(p - x_{n+1}) \rangle &\leq \langle y_n - x_{n+1}, j(p - x_{n+1}) \\ &\quad - j(p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p)) \rangle + L_2 \alpha_n \\ &\leq L_3 \|j(p - x_{n+1}) - j(p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p))\| + L_2 \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.30)$$

với $L_2 = \sup_n \{(\|y_n\| + \|u\|)(\|p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p)\|)\}$ và $L_3 = \sup_n \{\|x_{n+1}\| + \|y_n\|\}$.

Từ (2.29) và (2.30), ta nhận được

$$\begin{aligned} \langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - p) - j(x_{n+1} - p) \rangle &\leq L_1 \|x_{n+1} - x_n\| + L_2 \alpha_n \\ &\quad + L_3 \|j(p - x_{n+1}) - j(p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p))\|. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Từ Bổ đề 1.4, ta có j là liên tục đều theo chuẩn trên mỗi tập con bị chặn của E và từ $\|(p - x_{n+1}) - (p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p))\| = \alpha_n\|u - p\| \rightarrow 0$, suy ra

$$\|j(p - x_{n+1}) - j(p - x_{n+1} + \alpha_n(u - p))\| \rightarrow 0. \quad (2.32)$$

Từ (2.31) và (2.32), ta có

$$\langle y_n - x_{n+1}, j(y_n - p) - j(x_{n+1} - p) \rangle \rightarrow 0.$$

Từ Bổ đề 1.3, ta nhận được

$$g(\|y_n - x_{n+1}\|) \rightarrow 0.$$

Từ tính chất của hàm g , suy ra $\|x_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0$.

Bước 4. $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$, với $T = \frac{1}{2}(J_r^A + J_r^B)$, trong đó $r \in (0, \varepsilon)$.

Ta có

$$\|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| = \alpha_n\|u - J_{\gamma_n}^B y_n\| \rightarrow 0. \quad (2.33)$$

$$\|J_{\gamma_n}^B x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B y_n\| \leq \|x_{n+1} - y_n\| \rightarrow 0. \quad (2.34)$$

Do đó,

$$\|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B x_{n+1}\| \rightarrow 0. \quad (2.35)$$

Từ đó, suy ra

$$\begin{aligned} \|J_{\gamma_n}^B x_{n+1} - J_r^B x_{n+1}\| &= \|J_r^B(\frac{r}{\gamma_n}x_{n+1} + (1 - \frac{r}{\gamma_n})J_{\gamma_n}^B x_{n+1}) - J_r^B x_{n+1}\| \\ &\leq (1 - \frac{r}{\gamma_n})\|x_{n+1} - J_{\gamma_n}^B x_{n+1}\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Do đó,

$$\|x_n - J_r^B x_n\| \rightarrow 0. \quad (2.37)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|y_n - J_r^A y_n\| &= \|J_{\beta_n}^A x_n - J_r^A y_n\| \\ &= \|J_r^A(\frac{r}{\beta_n}x_n + (1 - \frac{r}{\beta_n})J_{\beta_n}^A x_n) - J_r^A y_n\| \\ &\leq (1 - \frac{r}{\beta_n})\|x_n - y_n\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Vì vậy,

$$\begin{aligned} \|x_n - J_r^A x_n\| &\leq \|x_n - y_n\| + \|y_n - J_r^A y_n\| + \|J_r^A y_n - J_r^A x_n\| \\ &\leq 2\|x_n - y_n\| + \|y_n - J_r^A y_n\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Từ (2.37) và (2.39), ta thu được

$$\begin{aligned}\|x_n - Tx_n\| &= \|x_n - \frac{1}{2}(J_r^A x_n + J_r^B x_n)\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x_n - J_r^A x_n\| + \|x_n - J_r^B x_n\|) \rightarrow 0.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Bước 5. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) \rangle \leq 0$.

Cho $\{x_t\}$ là dãy xác định bởi $x_t = tu + (1-t)Tx_t$, $t \in (0, 1)$. Khi đó, theo Định lý 2.3, $\{x_t\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u \in F(T) = S$, khi $t \rightarrow 0^+$.

Đặt $M = \sup\{\|x_t - x_n\| : t \in (0, 1), n \geq 0\}$. Ta có

$$\begin{aligned}\|x_t - x_n\|^2 &= t\langle u - x_n, j(x_t - x_n) \rangle + (1-t)\langle Tx_t - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \\ &= t\langle u - x_t, j(x_t - x_n) \rangle + t\|x_t - x_n\|^2 \\ &\quad + (1-t)\langle Tx_t - Tx_n, j(x_t - x_n) \rangle + (1-t)\langle Tx_n - x_n, j(x_t - x_n) \rangle \\ &\leq t\langle u - x_t, j(x_t - x_n) \rangle + t\|x_t - x_n\|^2 \\ &\quad + (1-t)\|x_t - x_n\|^2 + M\|x_n - Tx_n\|,\end{aligned}$$

điều này suy ra

$$\langle u - x_t, j(x_n - x_t) \rangle \leq \frac{M}{t}\|x_n - Tx_n\|.$$

Vì $x_n - Tx_n \rightarrow 0$, nên

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - x_t, j(x_t - x_n) \rangle \leq 0.\tag{2.41}$$

Ngoài ra, vì $x_t \rightarrow Q_S u$ khi $t \rightarrow 0^+$ và j là liên tục đều trên mỗi tập con bị chặn của E , nên

$$\begin{aligned}&|\langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) \rangle - \langle u - x_t, j(x_n - x_t) \rangle| \\ &= |\langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) - j(x_n - x_t) \rangle + \langle Q_S u - x_t, j(x_n - x_t) \rangle| \\ &\leq |\langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) - j(x_n - x_t) \rangle| + M\|x_t - Q_S u\| \rightarrow 0.\end{aligned}$$

Cho trước $\varepsilon > 0$ (bất kỳ), khi đó tồn tại số $\delta \in (0, 1)$ sao cho

$$\langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) \rangle < \langle u - x_t, j(x_n - x_t) \rangle + \varepsilon,$$

với mọi $t \in (0, \varepsilon)$.

Từ (2.41), ta nhận được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) \rangle \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - x_t, j(x_t - x_n) \rangle + \varepsilon \leq \varepsilon.$$

Vì $\varepsilon > 0$ là bất kỳ, nên

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(x_n - Q_S u) \rangle \leq 0.$$

Bước 6. $x_n \rightarrow Q_S u$ khi $n \rightarrow \infty$.

Từ Bổ đề 1.6, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - Q_S u\|^2 &= \|\alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n - Q_S u\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|J_{\gamma_n}^B y_n - Q_S u\|^2 \\ &\quad + 2\alpha_n(1 - \alpha_n) \langle u - Q_S u, j(x_{n+1} - Q_S u) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|y_n - Q_S u\|^2 + 2\alpha_n \langle u - Q_S u, j(x_{n+1} - Q_S u) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_n - Q_S u\|^2 + 2\alpha_n \langle u - Q_S u, j(x_{n+1} - Q_S u) \rangle. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 1.3, ta nhận được $x_n \rightarrow Q_S u$ khi $n \rightarrow \infty$.

Định lý được chứng minh. $\square$

Tiếp theo, các tác giả J.K. Kim và T.M. Tuyen cũng đã nghiên cứu sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z_n\}$ được xác định bởi $z_0 \in C$ và

$$d_n = J_{\beta_n}^A z_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.42)$$

$$z_{n+1} = \alpha_n f(d_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B d_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

trong đó $f : C \rightarrow C$ là một ánh xạ co từ C vào C với hệ số co là $c \in [0, 1)$. Họ đã chứng minh kết quả dưới đây:

Định lý 2.5. *Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rB)$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện:*

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.42) và (2.43) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Chứng minh. Gọi x^* là điểm bất động duy nhất của $Q_S f$, tức là $Q_S f(x^*) = x^*$. Từ Định lý 2.4, trong (2.20) và (2.21) thay u bởi $f(x^*)$, thì dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S f(x^*) = x^*$.

Ta sẽ chỉ ra $\|z_n - x_n\| \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$. Giả sử $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| > 0$. Khi đó, ta chọn ε với $\varepsilon \in (0, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\|)$. Vì $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$, nên tồn tại số tự nhiên n_1 sao cho

$$\|x_n - x^*\| < \frac{1-c}{c}\varepsilon,$$

với mọi $n \geq n_1 \in \mathbb{N}$. Ta xét hai trường hợp sau:

(i) Tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ thỏa mãn $n_2 \geq n_1$ và $\|z_{n_2} - x_{n_2}\| \leq \varepsilon$.

(ii) $\|z_n - x_n\| > \varepsilon$ với mọi $n \geq n_1$.

Trong trường hợp (i), ta có

$$\begin{aligned} \|z_{n_2+1} - x_{n_2+1}\| &\leq \alpha_{n_2} \|f(d_{n_2}) - f(x^*)\| + (1 - \alpha_{n_2}) \|n_2 - y_{n_2}\| \\ &\leq c\alpha_{n_2} \|d_{n_2} - x^*\| + (1 - \alpha_{n_2}) \|d_{n_2} - y_{n_2}\| \\ &\leq c\alpha_{n_2} \|z_{n_2} - x^*\| + (1 - \alpha_{n_2}) \|z_{n_2} - x_{n_2}\| \\ &\leq c\alpha_{n_2} \|x_{n_2} - x^*\| + [1 - \alpha_{n_2}(1 - c)] \|z_{n_2} - x_{n_2}\| \\ &\leq c\alpha_{n_2} \frac{1-c}{c} \varepsilon + [1 - \alpha_{n_2}(1 - c)] \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Bằng qui nạp, ta có thể chỉ ra rằng $\|z_{n+1} - x_{n+1}\| \leq \varepsilon$ với mọi $n \geq n_2$. Điều này mâu thuẫn với $\varepsilon < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\|$. Trong trường hợp (ii), với mỗi $n \geq n_1$, ta có

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x_{n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n) \|d_n - y_n\| + \alpha_n \|f(d_n) - f(x^*)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|z_n - x_n\| + c\alpha_n \|d_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|z_n - x_n\| + c\alpha_n \|z_n - x^*\| \\ &\leq [1 - \alpha_n(1 - c)] \|z_n - x_n\| + c\alpha_n \|x_n - x^*\|. \end{aligned}$$

Do vậy, từ Bổ đề 1.16, ta nhận được $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0$, suy ra mâu thuẫn. Do đó, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0$. Như vậy, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0.$$

Định lý được chứng minh. □

Chú ý 2.3. Nếu $A = 0$, thì từ (2.20), ta nhận được $y_n = x_n$, do đó Bước 3 trong chứng minh của Định lý 2.4 là không cần thiết. Như vậy, ta có hệ quả dưới đây:

Hệ quả 2.2. Cho E là một không gian Banach phản xạ với chuẩn khả vi Gâteaux đều và mọi tập con lồi, compact yếu của E đều có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu sao cho $S = A^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{n+1} = \alpha_n f(z_n) + (1 - \alpha_n) J_{\beta_n}^A z_n, \quad z_0 \in C, \quad n = 0, 1, 2, \quad (2.44)$$

hội tụ mạnh về một phần tử $x^* \in S$ sao cho $Q_S f(x^*) = x^*$.

Chú ý 2.4. Hệ quả 2.2 là kết quả của J.S. Jung [37] (xem dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (1.12)).

Ta biết rằng nếu A là toán tử m - j -đơn điệu, thì A thỏa mãn điều kiện miền. Do đó, ta có kết quả sau:

Định lý 2.6. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : E \longrightarrow 2^E$ và $B : E \longrightarrow 2^E$ là hai toán tử m - j -đơn điệu sao cho $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.42) và (2.43) hội tụ mạnh về một phần tử $x^* \in S$ sao cho $Q_S f(x^*) = x^*$.

Hệ quả 2.3. Cho E là một không gian Banach phản xạ với chuẩn khả vi Gâteaux đều và mọi tập con lồi, compact yếu của E đều có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là một toán tử m - j -đơn điệu sao cho $S = A^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện sau:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{n+1} = \alpha_n f(z_n) + (1 - \alpha_n) J_{\beta_n}^A z_n, \quad z_0 \in C, \quad n = 0, 1, 2, \quad (2.45)$$

hội tụ mạnh về một phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

2.2.2. Tính ổn định của phương pháp

Trong mục này chúng tôi trình bày về tính ổn định của phương pháp lặp (2.42) và (2.43) ở dạng sau:

$$v_n = J_{\beta_n}^{A^n} u_n, \quad u_0 \in C, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.46)$$

$$u_{n+1} = \alpha_n f(v_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^{B^n} v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

trong đó $A^n : D(A^n) \subseteq C \longrightarrow 2^E, A^n : D(A^n) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $D(A^n) = D(A), D(B^n) = D(B)$ và sao cho

$$\mathcal{H}(A^n(x), A(x)) \leq g_A(\|x\|) h_n^A, \quad \mathcal{H}(B^n(x), B(x)) \leq g_B(\|x\|) h_n^B \quad (2.48)$$

với g_A, g_B là các hàm bị chặn (ảnh của tập bị chặn là tập bị chặn) xác định với $t \geq 0$, thỏa mãn $g_A(0) = 0, g_B(0) = 0$ và $\{h_n^A\}, \{h_n^B\}$ là các dãy số thực dương.

Ta có các kết quả sau:

Định lý 2.7. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset, \overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Nếu các điều kiện sau đúng

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;

- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
 iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$;
 iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n h_n^A < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n h_n^B < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n h_n^A / \alpha_n = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n h_n^B / \alpha_n = 0$,

thì dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.46) và (2.47) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Chứng minh. Ta viết lại các phương trình (2.42) và (2.43) ở dạng

$$\beta_n A d_n + d_n \ni z_n, \quad (2.49)$$

$$\gamma_n B l_n + l_n \ni d_n, l_n = \frac{z_{n+1} - \alpha_n f(d_n)}{1 - \alpha_n}, \quad (2.50)$$

và các phương trình (2.46) and (2.47) ở dạng

$$\beta_n A^n v_n + v_n \ni u_n, \quad (2.51)$$

$$\gamma_n B^n w_n + w_n \ni v_n, w_n = \frac{u_{n+1} - \alpha_n f(v_n)}{1 - \alpha_n}. \quad (2.52)$$

Vì $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, nên tồn tại n_0 sao cho với $\eta \in (0, 1)$, thì $\alpha_n < 1 - \eta$ với mọi $n > n_0$, điều này suy ra $1 - \alpha_n > \eta$ với mọi $n > n_0$. Do vậy, $1 - \alpha_n \geq \eta_0 = \min_{i=1, \dots, n_0} \{\alpha_i, \eta\}$. Do đó,

$$\|l_n\| \leq \frac{\|z_{n+1}\| + \alpha_n \|f(d_n)\|}{1 - \alpha_n} \leq K = \frac{\sup_n \{\|z_{n+1}\| + \|f(d_n)\|\}}{\eta_0} < \infty,$$

với mọi n .

Từ (2.52), tồn tại $a_n \in B^n w_n$ sao cho

$$\gamma_n a_n + w_n = v_n. \quad (2.53)$$

Từ (2.50), tồn tại $b_n \in B l_n$ sao cho

$$\gamma_n b_n + l_n = d_n. \quad (2.54)$$

Từ (2.48), tồn tại $e_n \in B^n l_n$ sao cho

$$\|b_n - e_n\| \leq g_B(\|l_n\|) h_n^B \leq g_B(K) h_n^B. \quad (2.55)$$

Từ (2.53) và (2.54), ta nhận được

$$\gamma_n(b_n - a_n) + l_n - w_n = d_n - v_n.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} & \langle \gamma_n(b_n - e_n), j(l_n - w_n) \rangle + \langle \gamma_n(e_n - a_n), j(l_n - w_n) \rangle + \|l_n - w_n\|^2 \\ &= \langle d_n - v_n, j(l_n - w_n) \rangle. \end{aligned}$$

Do $\langle \gamma_n(e_n - a_n), j(l_n - w_n) \rangle \geq 0$ và từ (2.55), ta nhận được

$$\|l_n - w_n\| \leq \|d_n - v_n\| + g_B(K)h_n^B \gamma_n. \quad (2.56)$$

Bây giờ, ta sẽ đánh giá $\|d_n - v_n\|$. Từ (2.49) và (2.51), tồn tại $\xi_n \in Ad_n$ và $\zeta_n \in A^n v_n$ sao cho

$$\beta_n \xi_n + d_n = z_n, \quad \beta_n \zeta_n + v_n = u_n. \quad (2.57)$$

Từ (2.48), tồn tại $\tau_n \in A^n d_n$ sao cho

$$\|\xi_n - \tau_n\| \leq g_A(\|d_n\|)h_n^A \leq g_A(L)h_n^A, \quad (2.58)$$

với $L = \sup_n \{\|d_n\|\} < \infty$.

Từ (2.57), ta có

$$\begin{aligned} & \langle \beta_n(\zeta_n - \tau_n), j(v_n - d_n) \rangle + \langle \beta_n(\tau_n - \xi_n), j(v_n - d_n) \rangle + \|d_n - v_n\|^2 \\ &= \langle u_n - z_n, j(v_n - d_n) \rangle. \end{aligned}$$

Vì $\langle \beta_n(\zeta_n - \tau_n), j(v_n - d_n) \rangle \geq 0$ và từ (2.58), ta thu được

$$\|d_n - v_n\| \leq \|z_n - u_n\| + g_A(L)h_n^A \beta_n. \quad (2.59)$$

Kết hợp (2.56) và (2.59), ta nhận được

$$\|l_n - w_n\| \leq \|z_n - u_n\| + g_A(L)h_n^A \beta_n + g_B(K)h_n^B \gamma_n. \quad (2.60)$$

Ta có

$$\begin{aligned} \|l_n - w_n\| &= \left\| \frac{z_{n+1} - \alpha_n f(d_n)}{1 - \alpha_n} - \frac{u_{n+1} - \alpha_n f(v_n)}{1 - \alpha_n} \right\| \\ &\geq \frac{\|z_{n+1} - u_{n+1}\|}{1 - \alpha_n} - \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} \|f(d_n) - f(v_n)\| \\ &\geq \frac{\|z_{n+1} - u_{n+1}\|}{1 - \alpha_n} - \frac{\alpha_n c}{1 - \alpha_n} \|d_n - v_n\|. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Từ (2.60) và (2.61), suy ra

$$\|z_{n+1} - u_{n+1}\| \leq [1 - \alpha_n(1 - c)]\|z_n - u_n\| + g_A(L)h_n^A\beta_n + g_B(K)h_n^B\gamma_n. \quad (2.62)$$

Do vậy, từ Bổ đề 1.16, ta có $\|z_n - u_n\| \rightarrow 0$, kết hợp với $z_n \rightarrow x^*$, ta nhận được $u_n \rightarrow x^*$.

Định lý được chứng minh. $\square$

Ta có hệ quả dưới đây:

Hệ quả 2.4. Cho E là một không gian Banach phản xạ với chuẩn khả vi Gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E đều có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \rightarrow 2^E$ và $A^n : D(A^n) \subseteq E \rightarrow 2^E$, $n = 1, 2, \dots$, là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn $S = A^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$ và $D(A) = D(A^n)$ với mọi n . Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{n+1} = \alpha_n f(z_n) + (1 - \alpha_n) J_{\beta_n}^{A^n} z_n, \quad z_0 \in C, \quad n = 0, 1, 2, \quad (2.63)$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Ta biết rằng, trong không gian Hilbert, nếu A là toán tử m - j -đơn điệu, thì A là toán tử đơn điệu cực đại. Do đó, ta có định lý dưới đây:

Định lý 2.8. Cho H là một không gian Hilbert. Cho $A : H \rightarrow 2^H$ và $B : H \rightarrow 2^H$ là các toán tử đơn điệu cực đại với $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $f : H \rightarrow H$ là một ánh xạ co trong H . Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.42) và (2.43) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $P_S f(x^*) = x^*$, trong đó $P_S : H \rightarrow S$ là phép chiếu metric từ H lên S .

Hệ quả 2.5. Cho H là một không gian Hilbert. Cho $A : H \rightarrow 2^H$ là một toán tử đơn điệu cực đại với $S = A^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $f : H \rightarrow H$ là một ánh xạ co trong H . Cho $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là hai dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$ với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 \in H$ và

$$u_{n+1} = \alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n) J_{\beta_n}^A u_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.64)$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $P_S f(x^*) = x^*$, trong đó $P_S : H \rightarrow S$ là phép chiếu metric từ H lên S .

2.2.3. Ví dụ số minh họa

Dưới đây chúng tôi giới thiệu một ví dụ số đơn giản nhằm minh họa thêm cho Định lý 2.5.

Ví dụ 2.2. Xét bài toán tìm một phần tử

$$x^* \in S = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} f_1(x) \cap \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} f_2(x).$$

trong đó f_1 và f_2 được xác định bởi

$$f_i(x) = \langle A_i x, x \rangle + \langle B_i, x \rangle + C_i, \quad i = 1, 2$$

với

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = (-4 \quad -4 \quad 4), \quad B_2 = (-4 \quad -4 \quad 0), \quad C_1, C_2 \text{ là các hằng số bất kỳ.}$$

Ta có $\nabla^2 f_i = 2A_i$, $i = 1, 2$. Do A_i là các ma trận nửa xác định dương nên f_i là các hàm lồi trên $\mathbb{R}^3$. Ngoài ra, f_1, f_2 là các hàm chính thường, liên tục trong $\mathbb{R}^3$. Suy ra $\partial f_1, \partial f_2$ là các toán tử đơn điệu cực đại.

Như vậy, bài toán trên tương đương với bài toán xác định không điểm chung của hai toán tử đơn điệu cực đại sau:

Tìm một phần tử

$$x^* \in S = (\partial f_1)^{-1}0 \cap (\partial f_2)^{-1}0 \neq \emptyset.$$

Dễ dàng kiểm tra được tập nghiệm của bài toán là

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 2, x_3 = 0\}.$$

- Áp dụng Định lý 2.5 với $f(x) = u$, với $u = (1 \ 2 \ -1)$ và $f(x) = x/4$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$, $\alpha_n = 1/(n+1)$, $\beta_n = \gamma_n = 1$ với mọi $n \geq 0$, ta nhận được các kết quả số được mô tả trong Bảng 2.1 dưới đây:

$f(x) = u$			
TOL	n	$\ x_n - x^*\ $	x_n
10^{-3}	2801	9.99×10^{-4}	(0.500133, 1.500133, -0.000981)
10^{-4}	28007	9.99×10^{-5}	(0.500013, 1.500013, -9.81×10^{-5})
10^{-5}	280067	9.99×10^{-6}	(0.500001, 1.500001, -9.81×10^{-6})
10^{-6}	2800671	9.99×10^{-7}	(0.5, 1.5, -9.81×10^{-7})
$f(x) = x/4$			
TOL	n	$\ x_n - x^*\ $	x_n
10^{-3}	2693	9.99×10^{-4}	(0.999282, 1.000020, -0.000696)
10^{-4}	35233	9.99×10^{-5}	(0.999919, 1.000027, -5.32×10^{-5})
10^{-5}	586563	9.99×10^{-6}	(0.999991, 1.000004, -3.19×10^{-6})
10^{-6}	11637961	9.99×10^{-7}	(0.999999, 1, -1.61×10^{-7})

Bảng 2.1

2.3. Phương pháp prox-Tikhonov xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

2.3.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ

Định lý 2.9. Cho E là một không gian Banach phản xạ với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.
- (ii) $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy trong $[\varepsilon, \infty)$, với $\varepsilon > 0$.

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$x_{2n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_{2n}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.65)$$

$$x_{2n} = J_{\gamma_n}^B(x_{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.66)$$

trong đó u và x_0 là các phần tử bất kỳ trong C . Nếu $\{x_n\}$ là chính qui tiệm cận, thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, với $Q_S : C \rightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Chứng minh. Trước hết, ta chỉ ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn. Cho $p \in S$. Khi đó, từ (2.65) và (2.66), ta có

$$\begin{aligned} \|x_{2n+1} - p\| &\leq \|\alpha_n(u - p) + (1 - \alpha_n)(x_{2n} - p)\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_{2n} - p\| \\ &\leq \alpha_n \|u - p\| + (1 - \alpha_n) \|x_{2n-1} - p\|. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Áp dụng qui nạp vào (2.67), ta nhận được

$$\|x_{2n+1} - p\| \leq \left(1 - \prod_{k=0}^n (1 - \alpha_k)\right) \|u - p\| + \prod_{k=0}^n (1 - \alpha_k) \|x_0 - p\|.$$

Suy ra, dãy $\{x_{2n+1}\}$ bị chặn và do đó dãy $\{x_{2n}\}$ cũng bị chặn. Như vậy, ta thu được dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Tiếp theo, ta chỉ ra $\|x_{2n+1} - J_r^A(x_{2n+1})\| \rightarrow 0$ và $\|x_{2n} - J_r^B(x_{2n})\| \rightarrow 0$, trong đó $0 < r < \varepsilon$. Vì

$$\|x_{2n+1} - J_{\beta_n}^A(x_{2n})\| = \alpha_n \|u - x_{2n}\| \rightarrow 0, \quad (2.68)$$

$$\|J_{\beta}^A(x_{2n+1}) - J_{\beta_n}^A(x_{2n})\| \leq \|x_{2n+1} - x_{2n}\| \rightarrow 0, \quad (2.69)$$

nên ta có

$$\|x_{2n+1} - J_{\beta_n}^A(x_{2n+1})\| \leq \|x_{2n+1} - J_{\beta_n}^A(x_{2n})\| + \|J_{\beta}^A(x_{2n+1}) - J_{\beta_n}^A(x_{2n})\| \rightarrow 0. \quad (2.70)$$

Từ Bổ đề 1.2, ta nhận được

$$\begin{aligned} \|J_{\beta_n}^A(x_{2n+1}) - J_r^A(x_{2n+1})\| &= \|J_r^A\left(\frac{r}{\beta_n}x_{2n+1} + \left(1 - \frac{r}{\beta_n}\right)J_{\beta_n}^A(x_{2n+1})\right) - J_r^A(x_{2n+1})\| \\ &\leq \left(1 - \frac{r}{\beta_n}\right)\|x_{2n+1} - J_{\beta_n}^A(x_{2n+1})\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Từ (2.70) và (2.71), ta có

$$\|x_{2n+1} - J_r^A(x_{2n+1})\| \rightarrow 0.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\|x_{2n} - J_r^B(x_{2n})\| \rightarrow 0.$$

Áp dụng Bổ đề 1.1, ta nhận được $\omega_w(\{x_{2n+1}\}) \subset A^{-1}0$ và $\omega_w(\{x_{2n}\}) \subset B^{-1}0$, và do đó $\omega_w(\{x_n\}) \subset S$. Cho $\{y_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$y_{2n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_{2n}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.72)$$

$$y_{2n} = x_{2n-1}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.73)$$

Khi đó, rõ ràng rằng $\|y_n - x_n\| \rightarrow 0$ và $\omega_w(\{y_n\}) \subset S$.

Từ bao hàm cuối, ta nhận được

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(y_n - Q_S u) \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(y_{n_k} - Q_S u) \rangle \\ &= \langle u - Q_S u, j(\bar{x} - Q_S u) \rangle \leq 0, \end{aligned} \quad (2.74)$$

trong đó $\bar{x} = w - \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \in S$.

Đặt $q = Q_S u \in S$. Từ (2.72) và (2.73), ta có

$$\begin{aligned} \|y_{2n+1} - q\|^2 &\leq \|(1 - \alpha_n)(x_{2n} - q) + \alpha_n(u - q)\|^2 \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|x_{2n} - q\|^2 + 2\alpha_n \langle u - q, j(y_{2n+1} - q) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n)^2 \|x_{2n-1} - q\|^2 + 2\alpha_n \langle u - q, j(y_{2n+1} - q) \rangle \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|y_{2n-1} - q\|^2 + \sigma_n, \end{aligned}$$

trong đó $\sigma_n = 2\alpha_n \langle u - q, j(y_{2n+1} - q) \rangle$. Từ (2.27), ta có

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{\alpha_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - q, j(y_{2n+1} - q) \rangle \leq 0.$$

Do đó, từ Bổ đề 1.16, ta nhận được $y_{2n+1} \rightarrow q$. Hơn nữa, vì $x_{2n+1} - x_{2n} \rightarrow 0$ và $y_n - x_n \rightarrow 0$, nên ta có $x_{2n+1} \rightarrow q$ và $x_{2n} \rightarrow q$. Vậy dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $q = Q_S u$ khi $n \rightarrow \infty$. $\square$

Từ kết quả của Jung [35] ta có định lý dưới đây:

Định lý 2.10. Cho E là một không gian Banach phản xạ, lồi chặt với chuẩn khả vi Gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subset C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subset C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.
- (ii) $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy trong $[\varepsilon, \infty)$, với $\varepsilon > 0$.

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.65) và (2.66). Nếu $\{x_n\}$ là chính qui tiệm cận, thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, trong đó $Q_S : C \rightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Chứng minh. Đặt $T_1 = J_r^A$, $T_2 = J_r^B$ và $T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$, trong đó J_r^A , J_r^B được xác định như trong Định lý 2.9. Vì E là không gian Banach lồi chặt, nên $S = F(T)$. Đặt $\{y_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.72) và (2.73). Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \|y_n - J_r^A(y_n)\| &\leq \|y_n - x_n\| + \|x_n - J_r^A(x_n)\| \\ &\quad + \|J_r^A(x_n) - J_r^A(y_n)\| \\ &\leq 2\|x_n - y_n\| + \|x_n - J_r^A(x_n)\|. \end{aligned} \tag{2.75}$$

Ta chỉ ra $\|x_n - J_r^A(x_n)\| \rightarrow 0$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} \|x_{2n} - J_r^A(x_{2n})\| &\leq \|x_{2n} - x_{2n+1}\| + \|x_{2n+1} - J_r^A(x_{2n+1})\| \\ &\quad + \|J_r^A(x_{2n+1}) - J_r^A(x_{2n})\| \\ &\leq 2\|x_{2n} - x_{2n+1}\| + \|x_{2n+1} - J_r^A(x_{2n+1})\| \rightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Từ (2.75), (2.76) và $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, ta nhận được $\|y_n - J_r^A(y_n)\| \rightarrow 0$. Tương tự, ta cũng nhận được $\|y_n - J_r^B(y_n)\| \rightarrow 0$. Do đó, ta có

$$\|y_n - T(y_n)\| \leq \frac{1}{2}(\|y_n - J_r^A(y_n)\| + \|y_n - J_r^B(y_n)\|) \rightarrow 0.$$

Áp dụng Định lý 2.3 và Bổ đề 1.9 với $f(x) = u$ với mọi $x \in C$, ta nhận được

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle u - Q_S u, j(y_n - Q_S u) \rangle \leq 0.$$

Phần còn lại của chứng minh được thực hiện như chứng minh của Định lý 2.9. $\square$

Bổ đề 2.1. Cho E là một không gian Banach lồi đều. Nếu các dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq \varepsilon$, $\gamma_n \geq \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ nào đó và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$,

khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.65) và (2.66) là chính qui tiệm cận.

Chứng minh. Trường hợp 1. $\beta_{n+1} \leq \beta_n$: Sử dụng đồng nhất giải thức, ta viết (2.65) ở dạng

$$x_{2n+1} = J_{\beta_{n+1}}^A \left(\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} (\alpha_n u + (1 - \alpha_n) x_{2n}) + \left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right) x_{2n+1} \right).$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} \|x_{2n+3} - x_{2n+1}\| &\leq \left\| \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} (1 - \alpha_n) (x_{2n+2} - x_{2n}) \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right) (x_{2n+2} - x_{2n+1}) \right. \\ &\quad \left. + \left(\alpha_{n+1} - \frac{\beta_{n+1}\alpha_n}{\beta_n}\right) (u - x_{2n+2}) \right\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_{2n+2} - x_{2n}\| \\ &\quad + \left(\left|1 - \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\right| + \left|\alpha_{n+1} - \frac{\beta_{n+1}\alpha_n}{\beta_n}\right| \right) K \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|x_{2n+2} - x_{2n}\| \\ &\quad + \left(\frac{2}{\varepsilon} |\beta_{n+1} - \beta_n| + |\alpha_{n+1} - \alpha_n| \right) K, \end{aligned} \tag{2.77}$$

trong đó K là hằng số dương sao cho

$$\sup_{n \geq 0} \left\{ \|u - x_{2n+2}\| + \|x_{2n+2} - x_{2n+1}\| \right\} \leq K.$$

Trường hợp 2. $\beta_{n+1} > \beta_n$: Ta có

$$\begin{aligned} x_{2n+3} &= J_{\beta_{n+1}}^A(\alpha_{n+1}u + (1 - \alpha_{n+1})x_{2n+2}) \\ &= J_{\beta_n}^A\left(\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}(\alpha_{n+1}u + (1 - \alpha_{n+1})x_{2n+2}) + \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right)x_{2n+3}\right). \end{aligned}$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \|x_{2n+3} - x_{2n+1}\| &\leq \left\| \left(\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}(\alpha_{n+1}u + (1 - \alpha_{n+1})x_{2n+2}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right)x_{2n+3} \right) - (\alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_{2n}) \right\| \\ &\leq \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}(1 - \alpha_{n+1})\|x_{2n+2} - x_{2n}\| \\ &\quad + \left| \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\alpha_{n+1} - \alpha_n \right| \|u - x_{2n}\| \\ &\quad + \left| 1 - \frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} \right| \|x_{2n} - x_{2n+3}\| \\ &\leq (1 - \alpha_n)\|x_{2n+2} - x_{2n}\| \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{\varepsilon}|\beta_{n+1} - \beta_n| + |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\right)M, \end{aligned} \tag{2.78}$$

trong đó M là hằng số dương thỏa mãn

$$\sup_{n \geq 0} \left\{ \|u - x_{2n}\| + \|x_{2n+3} - x_{2n}\| + \|x_{2n+2} - x_{2n}\| \right\} \leq M.$$

Từ (2.77) và (2.78), ta nhận được

$$\|x_{2n+3} - x_{2n+1}\| \leq (1 - \alpha_n)\|x_{2n+2} - x_{2n}\| + 2\left(\frac{1}{\varepsilon}|\beta_{n+1} - \beta_n| + |\alpha_{n+1} - \alpha_n|\right)M',$$

trong đó $M' = \max\{K, M\}$.

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} \|x_{2n+2} - x_{2n}\| &= \left\| J_{\gamma_n}^B\left(\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}x_{2n+1} + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right)x_{2n+2}\right) - J_{\gamma_n}^B(x_{2n-1}) \right\| \\ &\leq \left\| (x_{2n+1} - x_{2n-1}) + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right)(x_{2n+2} - x_{2n+1}) \right\| \\ &\leq \|x_{2n+1} - x_{2n-1}\| + \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\right)K \\ &\leq \|x_{2n+1} - x_{2n-1}\| + \frac{1}{\varepsilon}|\gamma_{n+1} - \gamma_n|M'. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|x_{2n+3} - x_{2n+1}\| &\leq (1 - \alpha_n)\|x_{2n+1} - x_{2n-1}\| \\ &\quad + 2\left(\frac{1}{\varepsilon}|\beta_{n+1} - \beta_n| + |\alpha_{n+1} - \alpha_n| + \frac{1}{\varepsilon}|\gamma_{n+1} - \gamma_n|\right)M'. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 1.16, ta nhận được

$$\|x_{2n+1} - x_{2n-1}\| \rightarrow 0.$$

Tương tự như trên, ta cũng nhận được $\|x_{2n+2} - x_{2n}\| \rightarrow 0$.

Từ (2.65), ta có

$$x_{2n+1} - x_{2n+2} + \beta_n A x_{2n+1} \ni \alpha_n(u - x_{2n}) + x_{2n} - x_{2n+2}.$$

Đặt $p \in S$. từ tính j -đơn điệu của A , ta nhận được

$$\langle x_{2n+1} - x_{2n+2}, j(x_{2n+1} - p) \rangle \leq \alpha_n K' + L\|x_{2n} - x_{2n+2}\|, \quad (2.79)$$

với các hằng số dương K' và L . Tương tự, từ bao hàm

$$x_{2n+2} - x_{2n+1} + \gamma_{n+1} B x_{2n+2} \ni 0$$

và tính j -đơn điệu của B , ta có

$$\langle x_{2n+2} - x_{2n+1}, j(x_{2n+2} - p) \rangle \leq 0. \quad (2.80)$$

Cộng các bất đẳng thức (2.79), (2.80) và cho $n \rightarrow \infty$ ta nhận được

$$\langle x_{2n+2} - x_{2n+1}, j(x_{2n+2} - p) - j(x_{2n+1} - p) \rangle \rightarrow 0. \quad (2.81)$$

Từ Bổ đề 1.3, ta nhận được

$$g(\|x_{2n+2} - x_{2n+1}\|)\|x_{2n+2} - x_{2n+1}\| \rightarrow 0.$$

Từ tính chất của hàm g , ta nhận được

$$\|x_{2n+2} - x_{2n+1}\| \rightarrow 0.$$

Do đó, $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. □

Tiếp theo, ta nghiên cứu sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{2n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(z_{2n}) + (1 - \alpha_n)z_{2n}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.82)$$

$$z_{2n} = J_{\gamma_n}^B(z_{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.83)$$

trong đó $f : C \rightarrow C$ là một ánh xạ co từ C vào chính nó với hệ số co là $c \in [0, 1)$.

Định lý 2.11. Cho E là một không gian Banach lồi đều với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E và cho $f : C \rightarrow C$ là ánh xạ co từ C vào chính nó. Cho $A : D(A) \subset C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subset C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$, với mọi n , and $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.82) và (2.83) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Chứng minh. Giả sử x^* là điểm bất động duy nhất của $Q_S f$, tức là $Q_S f(x^*) = x^*$. Từ Bổ đề 2.1, Định lý 2.9 và Định lý 2.10, trong (2.20) và (2.21) thay u bởi $f(x^*)$, ta nhận được dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S f(x^*) = x^*$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra $\|z_n - x_n\| \rightarrow 0$, khi $n \rightarrow \infty$. Giả sử

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| > 0.$$

Khi đó, ta có thể lấy ε với $\varepsilon \in (0, \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n+1} - x_{2n+1}\|)$. Vì $\|x_n - x^*\| \rightarrow 0$, nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $n \geq n_1$, ta có

$$\|x_{2n+1} - x^*\| < \left(\frac{1-c}{c}\right)\varepsilon$$

Ta xét hai trường hợp sau:

- (i) Tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ với $n_2 \geq n_1$ sao cho $\|z_{2n_2+1} - x_{2n_2+1}\| \leq \varepsilon$.
- (ii) $\|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| > \varepsilon$, với mọi $n \geq n_1$.

Trong trường hợp (i), ta có

$$\begin{aligned}
\|z_{2n_2+3} - x_{2n_2+3}\| &\leq (1 - \alpha_{n_2+1})\|z_{2n_2+2} - x_{2n_2+2}\| \\
&\quad + \alpha_{n_2+1}\|f(z_{2n_2+2}) - f(x^*)\| \\
&\leq [1 - \alpha_{n_2+1}(1 - c)]\|z_{2n_2+2} - x_{2n_2+2}\| \\
&\quad + \alpha_{n_2+1}c\|x_{2n_2+2} - x^*\| \\
&\leq [1 - \alpha_{n_2+1}(1 - c)]\|z_{2n_2+1} - x_{2n_2+1}\| \\
&\quad + \alpha_{n_2+1}c\|x_{2n_2+1} - x^*\| \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bằng qui nạp, ta có thể chỉ ra rằng $\|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| \leq \varepsilon$, với mọi $n \geq n_2$, điều này mâu thuẫn với $\varepsilon < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n+1} - x_{2n+1}\|$.

Trong trường hợp (ii), với $n \geq n_1$, ta có

$$\begin{aligned}
\|z_{2n+3} - x_{2n+3}\| &\leq (1 - \alpha_{n+1})\|z_{2n+2} - x_{2n+2}\| \\
&\quad + \alpha_{n+1}\|f(z_{2n+2}) - f(x^*)\| \\
&\leq [1 - \alpha_{n+1}(1 - c)]\|z_{2n+2} - x_{2n+2}\| \\
&\quad + \alpha_{n+1}c\|x_{2n+2} - x^*\| \\
&\leq [1 - \alpha_{n+1}(1 - c)]\|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| \\
&\quad + \alpha_{n+1}c\|x_{2n+1} - x^*\|.
\end{aligned}$$

Do đó, từ Bổ đề 1.16, ta nhận được $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| = 0$, mâu thuẫn với trường hợp (ii). Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n+1} - x_{2n+1}\| = 0$. Tương tự, ta cũng có $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_{2n} - x_{2n}\| = 0$. Vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| = 0$. Do đó, ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0.$$

Định lý được chứng minh. $\square$

Chú ý 2.5. Nếu $B = 0$, thì từ (2.65), ta nhận được $z_{2n} = z_{2n-1}$, do đó từ Bổ đề 2.1, trong Định lý 2.9 ta có thể bỏ điều kiện E là không gian Banach lồi đều. Do đó, ta có Hệ quả sau (xem [58, Định lý 3.5]).

Hệ quả 2.6. [58] *Cho E là không gian Banach phản xạ với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng E và cho $f : C \rightarrow C$ là một ánh xạ co từ C vào chính nó. Cho $A : D(A) \subset C \rightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu thỏa mãn*

$$S := A^{-1}0 \neq \emptyset,$$

và $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$. Cho $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq r > 0$, với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(z_n) + (1 - \alpha_n)z_n), \quad z_0 \in C, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

hội tụ mạnh tới phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.11 với $Bx = 0$ với mọi $x \in E$, ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

Chú ý 2.6. Hệ quả trên tổng quát hơn kết quả của Sahu và Yao trong tài liệu [58, Định lý 3.5].

2.3.2. Tính ổn định của phương pháp

Ta đã biết rằng nếu toán tử A là m - j -đơn điệu, thì A thỏa mãn điều kiện miền. Do đó, ta có kết quả sau:

Định lý 2.12. Cho E là một không gian Banach lồi đều với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều và cho $f : E \rightarrow E$ là ánh xạ co. Cho $A : E \rightarrow 2^E$ và $B : E \rightarrow 2^E$ là các toán tử m - j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset.$$

Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$, với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 \in E$ và

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(u_{2n}) + (1 - \alpha_n)u_{2n} + e_n), \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{2n} &= J_{\gamma_n}^B(u_{2n-1} + e'_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$, với $\{e_n\}$ và $\{e'_n\}$ là các dãy sai số thỏa mãn các điều kiện:

- (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|e'_n\| < \infty$ hoặc
 (iv*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|/\alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e'_n\|/\alpha_n = 0$.

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned} \|u_{2n+1} - z_{2n+1}\| &\leq \alpha_n \|f(u_{2n}) - f(z_{2n})\| + (1 - \alpha_n) \|u_{2n} - z_{2n}\| + \|e_n\| + \|e'_n\| \\ &\leq [1 - \alpha_n(1 - c)] \|u_{2n} - z_{2n}\| + \|e_n\| + \|e'_n\| \\ &\leq [1 - \alpha_n(1 - c)] \|u_{2n-1} - z_{2n-1}\| + \|e_n\| + \|e'_n\|. \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 1.16, suy ra $\|u_{2n+1} - z_{2n+1}\| \rightarrow 0$. Tương tự, ta cũng có $\|u_{2n} - z_{2n}\| \rightarrow 0$. Do vậy $\|u_n - z_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Từ đó, ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - x^*\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - z_n\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - x^*\| = 0.$$

Định lý được chứng minh. □

Từ Định lý trên, ta nhận được các hệ quả dưới đây (xem [58, Định lý 3.7]).

Hệ quả 2.7. [58] Cho E là không gian Banach phản xạ với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn và cho $f : E \rightarrow E$ là một ánh xạ co. Cho $A : E \rightarrow 2^E$ là một toán tử m - j -đơn điệu sao cho

$$S := A^{-1}0 \neq \emptyset.$$

Cho $\{\alpha_n\}$ và $\{\beta_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
 (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
 (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
 (iii) $\beta_n \geq r > 0$, với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 \in E$ và

$$u_{n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(u_n) + (1 - \alpha_n)u_n + e_n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.84)$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$, trong đó $\{e_n\}$ là dãy sai số trong E thỏa mãn các điều kiện:

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty \text{ hoặc}$$

$$(iv^*) \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|/\alpha_n = 0.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.12 với $Bx = 0$ với mọi $x \in E$, ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

Hệ quả 2.8. Cho H là một không gian Hilbert. Cho $A : H \rightarrow 2^H$ và $B : H \rightarrow 2^H$ là các toán tử đơn điệu cực đại sao cho

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset.$$

Cho $f : H \rightarrow H$ là một ánh xạ co. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty;$$

$$(ii) \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty \text{ hoặc}$$

$$(ii^*) \lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1;$$

$$(iii) \beta_n \geq r > 0, \gamma_n \geq r > 0, \text{ với mọi } n, \text{ và } \sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty.$$

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 \in H$ và

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(u_{2n}) + (1 - \alpha_n)u_{2n} + e_n), \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{2n} &= J_{\gamma_n}^B(u_{2n-1} + e'_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $P_S f(x^*) = x^*$, trong đó $P_S : H \rightarrow S$ là phép chiếu metric từ H lên S , $\{e_n\}$ và $\{e'_n\}$ là các dãy sai số trong H thỏa mãn các điều kiện:

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty, \sum_{n=0}^{\infty} \|e'_n\| < \infty \text{ hoặc}$$

$$(iv^*) \lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|/\alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \|e'_n\|/\alpha_n = 0.$$

2.3.3. Ví dụ số minh họa

Ví dụ 2.3. Xét bài toán tìm phần tử

$$x^* \in S := (\partial f_1)^{-1}0 \cap (\partial f_2)^{-1}0 \neq \emptyset,$$

tức là

$$x^* \in S = \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} f_1(x) \cap \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^3} f_2(x),$$

trong đó f_1 và f_2 được xác định bởi

$$f_i(x) = \langle A_i x, x \rangle + \langle B_i, x \rangle + C_i, \quad i = 1, 2$$

với

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = (-4 \quad -4 \quad 4), \quad B_2 = (-4 \quad -4 \quad 0), \quad C_1, \quad C_2 \text{ là các hằng số bất kỳ.}$$

Để thấy rằng f_1 và f_2 là các hàm lồi chính thường và liên tục trên $\mathbb{R}^3$ và

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 2, x_3 = 0\}.$$

Áp dụng Định lý 2.11 với $f(x) = u$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$, $u = (1 \quad 2 \quad -1)$ và $\alpha_n = 1/(n+1)$, $\beta_n = \gamma_n = 1$ với mọi $n \geq 0$, ta nhận được bảng kết quả sau:

n	x_1^n	x_2^n	x_3^n	n	x_1^n	x_2^n	x_3^n
100	0.498749	1.498750	-0.017499	600	0.499791	1.499791	-0.002916
200	0.499374	1.499375	-0.008749	700	0.499821	1.499821	-0.002499
300	0.499583	1.499583	-0.005833	800	0.499843	1.499843	-0.002187
400	0.499687	1.499687	-0.004374	900	0.499861	1.499861	-0.001944
500	0.499749	1.499750	-0.003499	1000	0.499874	1.499875	-0.001749

Table 1. Nghiệm chính xác là $P_S u = (0.5 \quad 1.5 \quad 0)$

Ví dụ 2.4. Cho $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm số được xác định bởi

$$f(x) = \langle A_1 x, x \rangle + \langle B_1, x \rangle + C_1,$$

trong đó

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B_1 = (4 \quad -8), \quad C_1 \text{ là hằng số bất kỳ.}$$

Xét bài toán: Tìm một phần tử

$$x^* \in S := \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x),$$

trong đó

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \geq 2\}.$$

Dễ thấy rằng f là một hàm lồi chính thường và liên tục trên $\mathbb{R}^2$ và

$$\operatorname{argmin}_{x \in C} f(x) = \{(x_1, x_2) : x_1 - 2x_2 + 2 = 0, x_1 \geq 2/3\}.$$

Ta biết rằng

$$x^* \in \operatorname{argmin}_{x \in C} f(x)$$

nếu và chỉ nếu

$$\nabla f(x^*) + N_C(x^*) \ni 0,$$

tức là, x^* là nghiệm của bất đẳng thức biến phân

$$\langle y - x, \nabla f(x) \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Áp dụng Định lý 2.11 với $\alpha_n = \frac{1}{n+1}$, $\beta_n = 1$, với mọi n , $f(x) = u = \begin{pmatrix} 1 & -4 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = 0$ và sử dụng phương pháp chiếu gradient (xem [33, 46, 69]) với $\mu = 1/80$ để giải bất đẳng thức biến phân

$$x_{n+1} = VI(C, A + I - y_n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

ta nhận được bảng kết quả số sau. Chú ý rằng $A = \nabla f$, $A + I - y_n$ là 11-Lipschitz và η -đơn điệu mạnh trên $\mathbb{R}^2$, với $\eta \geq 1$.

n	x_1^n	x_2^n	n	x_1^n	x_2^n
100	1.999000	2.002000	600	1.999833	2.000333
200	1.999500	2.001000	700	1.999857	2.000285
300	1.999666	2.000666	800	1.999875	2.000250
400	1.999750	2.000500	900	1.999888	2.000222
500	1.999800	2.000400	1000	1.999900	2.000200

Table 2. Nghiệm chính xác là $P_S u = \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix}$

2.4. Xấp xỉ điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn

Năm 2017, chúng tôi cũng đã thiết lập được bốn định lý hội tụ mạnh tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực [66]. Các kết quả này có thể ứng dụng cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn toán tử đơn điệu trong không gian Hilbert.

Định lý 2.13. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H với $\text{diam}(C) < \infty$. Cho $\mathcal{T}_i = \{T_{i,n}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là dãy các ánh xạ gần

không giãn từ C vào H tương ứng với dãy $\{a_{i,n}\}$ sao cho $S = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(\mathcal{T}_i) \neq \emptyset$.

Cho $T_i : C \rightarrow H$, $i = 1, 2, \dots, N$ xác định bởi $T_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i,n}(x)$ với mọi $x \in C$.

Giả sử rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_C(T_{i,n}, T_i) = 0$ và $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(\mathcal{T}_i)$. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi:

$$\begin{cases} y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ C_n^i = \{z \in C : \|y_n^i - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i,n})a_{i,n}\}, \\ C_n = \bigcap_{i=1}^N C_n^i, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.85)$$

hoặc

$$\begin{cases} y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \in \underset{i=1,2,\dots,N}{\text{argmax}} \{\|y_n^i - x_n\|\}, \\ \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in C : \|\bar{y}_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i_n,n})a_{i_n,n}\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.86)$$

trong đó $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Định lý 2.14. Cho C , $\mathcal{T}_i = \{T_{i,n}\}$, T_i với $i = 1, 2, \dots, N$ được giả thiết tương tự như trong Định lý 2.13. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi:

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ C_n^i = \{z \in C_n : \|y_n^i - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i,n})a_{i,n}\}, \\ C_{n+1} = \bigcap_{i=1}^N C_n^i, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.87)$$

hoặc

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n} x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \in \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{\|y_n^i - x_n\|\}, \\ \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|\bar{y}_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i_n,n})a_{i_n,n}\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.88)$$

trong đó $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $A_i : D(A_i) \subset C \rightarrow 2^H$ là các toán tử đơn điệu với $S = \bigcap_{i=1}^N A_i^{-1}(0) \neq \emptyset$ và

$\overline{D(A_i)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA_i)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$. Bây giờ, áp dụng các kết

quả mới của chúng tôi cho bài toán xác định không điểm chung của họ hữu hạn các toán tử A_i mà không cần giả thiết $\text{diam}(C) < \infty$. Định lý sau là hệ quả trực tiếp của các Định lý 2.13 và Định lý 2.14

Định lý 2.15. Cho $\{r_{i,n}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là dãy các số thực dương sao cho

$$\min_{i=1,2,\dots,N} \left\{ \inf_n \{r_{i,n}\} \right\} = r > 0.$$

Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi (2.85)-(2.86) hoặc (2.87)-(2.88), với $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$ và $T_{i,n} = J_{r_{i,n}}^{A_i}$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Chương 3

Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach

Trong chương này, đề tài tập trung trình bày các kết quả về phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach [64].

Trong [59], W. Takahashi đã chứng minh định lý sau:

Định lý 3.1. [59] *Cho E và F là các không gian Banach lồi đều và trơn, và cho J_E và J_F là các ánh xạ đối ngẫu trên E và F , tương ứng. Cho A và B là các toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} và F vào 2^{F^*} , tương ứng. Cho Q_μ là toán tử giải metric của B với $\mu > 0$. Cho $T : E \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính bị chặn sao cho $T \neq 0$ và cho T^* là toán tử liên hợp của T . Giả sử $S = A^{-1}0 \cap T^{-1}(B^{-1}0) \neq \emptyset$. Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi*

$$\begin{aligned} z_n &= x_n - \mu_n J_E^{-1} T^* J_F(Tx_n - Q_{\mu_n} Tx_n), \\ C_n &= \{z \in A^{-1}0 : \langle z_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq 0\}, \\ Q_n &= \{z \in A^{-1}0 : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó $\{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ và $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$0 < a \leq \mu_n \leq b < \frac{1}{\|T\|^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, ở đây $z_0 = P_S x_1$.

Ta có thể thấy rằng, trong phương pháp lặp (3.1), rất khó để xác định các tập C_n và Q_n , vì ta không biết tập không điểm $A^{-1}0$ của A . Do đó, rất khó để xác định phần tử $x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n} x_1$.

Như vậy, có ba câu hỏi mở được đặt ra như sau:

- 1) Có thể thay các tập C_n và Q_n bằng các nửa không gian đóng của E hay không?

- 2) Có thể bỏ các điều kiện $\mu_n \leq b < \frac{1}{\|T\|^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ hay không?
- 3) Có thể mở rộng Định lý 3.1 cho trường hợp $S = \cap_{i=1}^N A_i^{-1}0 \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^M B_j^{-1}0) \neq \emptyset$, trong đó A_i và B_j là các toán tử đơn điệu cực đại trên các không gian Banach E_1 và E_2 , tương ứng?

Ta cần nhắc lại một số khái niệm và tính chất liên quan để phục vụ việc chứng minh các kết quả như sau:

Cho E là một không gian Banach trơn. Ta định nghĩa hàm $\phi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ bởi

$$\phi(x, y) = \|x\|^2 - 2\langle x, J_E y \rangle + \|y\|^2,$$

với mọi $x, y \in E$. Từ định nghĩa của ϕ , dễ dàng thấy rằng ϕ có các tính chất sau:

- i) $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq \phi(x, y) \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ với mọi $x, y \in E$;
- ii) $\phi(x, y) = \phi(x, z) + \phi(z, y) + 2\langle x - z, J_E z - J_E y \rangle$ với mọi $x, y, z \in E$;
- iii) Nếu E là không gian lồi chặt, thì $\phi(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

Ta biết rằng, nếu E là một không gian Banach phản xạ, lồi chặt và C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của E , thì với mỗi $x \in E$, tồn tại duy nhất $z \in C$ sao cho

$$\|x - z\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

Ánh xạ $P_C : E \longrightarrow C$ xác định bởi $P_C x = z$ được gọi là phép chiếu metric từ E lên C .

Cho $A : E \longrightarrow 2^{E^*}$ là một toán tử. Toán tử A được gọi là đơn điệu nếu $\langle x - y, u - v \rangle \geq 0$ với mọi $x, y \in D(A)$ và mọi $u \in Ax, v \in Ay$. Một toán tử đơn điệu A trên E được gọi là đơn điệu cực đại nếu đồ thị của nó không là tập con thực sự của bất kỳ toán tử đơn điệu nào khác trên E . Ta biết rằng nếu A là một toán tử đơn điệu cực đại trên E và nếu E là một không gian Banach lồi đều và trơn, thì $R(J_E + rA) = E^*$ với mọi $r > 0$, trong đó $R(J_E + rA)$ là miền ảnh của $J_E + rA$ (xem [15, 56]). Với mỗi $x \in E$ và $r > 0$, tồn tại duy nhất $x_r \in E$ sao cho

$$0 \in J_E(x_r - x) + rAx_r.$$

Ta xác định ánh xạ J_r bởi $x_r = J_r x$ và J_r được gọi là toán tử giải metric của A .

Ta cần các bổ đề dưới đây:

Bổ đề 3.1. [61] Cho E là một không gian Banach trơn và cho J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E . Khi đó, $\langle x - y, J_E x - J_E y \rangle \geq 0$ với mọi $x, y \in E$. Hơn nữa, nếu E là lồi chặt và $\langle x - y, J_E x - J_E y \rangle = 0$, thì $x = y$.

Bổ đề 3.2. [38] Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn và cho $\{y_n\}, \{z_n\}$ là hai dãy trong E . Nếu $\phi(y_n, z_n) \rightarrow 0$ và $\{y_n\}$ hoặc $\{z_n\}$ bị chặn, thì $y_n - z_n \rightarrow 0$.

Bổ đề 3.3. [30] Cho E là một không gian Banach phản xạ, trơn và lồi chặt. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E , $x_1 \in E$ và $z \in C$. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

- i) $z = P_C x_1$;
- ii) $\langle z - y, J_E(x_1 - z) \rangle \geq 0, \forall y \in C$.

3.1. Sự hội tụ của phương pháp lặp song song

Cho E và F là các không gian Banach lồi đều và trơn và cho J_E, J_F là các ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E và F , tương ứng. Cho $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ và $B_j, j = 1, 2, \dots, M$ là các toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} và F vào 2^{F^*} , tương ứng. Cho J_λ^i và Q_μ^j là các toán tử giải metric của A_i với $\lambda > 0$ và B_j với $\mu > 0$, tương ứng. Cho $T : E \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính bị chặn sao cho $T \neq 0$ và T^* là toán tử liên hợp của T . Giả sử $S = \cap_{i=1}^N A_i^{-1} 0 \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^M B_j^{-1} 0) \neq \emptyset$.

Xét bài toán sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in S. \quad (3.2)$$

Để giải Bài toán (3.2), ta xây dựng phương pháp lặp sau:

Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$\begin{aligned} z_{j,n} &= x_n - r_n J_E^{-1} T^* (J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^j Tx_n)), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ \text{Chọn } j_n \text{ sao cho } \|z_{j_n,n} - x_n\| &= \max_{j=1,\dots,M} \|z_{j,n} - x_n\|, \text{ đặt } z_n = z_{j_n,n}, \\ y_{i,n} &= J_{\lambda_n}^i z_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|y_{i_n,n} - z_n\| &= \max_{i=1,\dots,N} \|y_{i,n} - z_n\|, \text{ đặt } y_n = y_{i_n,n}, \\ C_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\|^2\}, \\ D_n &= \{z \in E : \langle y_n - z, J_E(z_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ Q_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_n \cap D_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

trong đó $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ và $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$0 < a \leq r_n, \text{ and } 0 < b \leq \lambda_n, \mu_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trước hết, ta có các bổ đề sau:

Bổ đề 3.4. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn và cho J_E là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E . Cho A là một toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} sao cho $A^{-1}0 \neq \emptyset$ và cho J_r là giải metric của A với $r > 0$. Cho $\{x_n\}$ là dãy bị chặn trong E và cho $\{r_n\}$ là dãy các số thực dương. Khi đó, $\{J_{r_n}x_n\}$ là bị chặn.

Chứng minh. Lấy $z \in A^{-1}0$ và từ định nghĩa của $J_{r_n}x_n$, ta có

$$\frac{J_E(x_n - J_{r_n}x_n)}{r_n} \in AJ_{r_n}x_n.$$

Từ tính đơn điệu của A , ta nhận được

$$\langle J_{r_n}x_n - z, J_E(x_n - J_{r_n}x_n) \rangle \geq 0, \quad (3.4)$$

với mọi $n \geq 1$.

Đặt $K = \max\{\|z\|, \sup_n \{\|x_n\|\}\} < \infty$. Từ (3.4), ta có

$$\begin{aligned} \|J_{r_n}x_n - x_n\|^2 &\leq \langle x_n - z, J_E(x_n - J_{r_n}x_n) \rangle \\ &\leq \|x_n - z\| \cdot \|J_{r_n}x_n - x_n\|. \end{aligned}$$

Do đó, ta thu được

$$\|J_{r_n}x_n - x_n\| \leq 2K,$$

suy ra

$$\|J_{r_n}x_n\| \leq 3K,$$

với mọi $n \geq 0$. Vậy $\{J_{r_n}x_n\}$ bị chặn. □

Bổ đề 3.5. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn và cho J_E là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E . Cho A là một toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} sao cho $A^{-1}0 \neq \emptyset$ và cho J_r là giải metric của A với $r > 0$. Cho $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy bị chặn trong E sao cho $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ và cho $\{r_n\}$ là dãy các số thực dương. Khi đó, $\|J_{r_n}x_n - J_{r_n}y_n\| \rightarrow 0$.

Chứng minh. Từ định nghĩa của $J_{r_n}x_n$ và $J_{r_n}y_n$, ta có

$$\frac{1}{r_n}J_E(x_n - J_{r_n}x_n) \in AJ_{r_n}x_n,$$

$$\frac{1}{r_n} J_E(y_n - J_{r_n} y_n) \in A J_{r_n} y_n.$$

Từ tính đơn điệu của A , ta có

$$\langle J_{r_n} - J_{r_n} y_n, J_E(x_n - J_{r_n} x_n) - J_E(y_n - J_{r_n} y_n) \rangle \geq 0.$$

Từ tính chất của ϕ và bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} & 2\langle x_n - y_n, J_E(x_n - J_{r_n} x_n) - J_E(y_n - J_{r_n} y_n) \rangle \\ & \geq 2\langle (x_n - J_{r_n} x_n) - (y_n - J_{r_n} y_n), J_E(x_n - J_{r_n} x_n) - J_E(y_n - J_{r_n} y_n) \rangle \quad (3.5) \\ & = \phi(x_n - J_{r_n} x_n, y_n - J_{r_n} y_n) + \phi(y_n - J_{r_n} y_n, x_n - J_{r_n} x_n). \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 3.4, ta có $\{J_E(x_n - J_{r_n} x_n) - J_E(y_n - J_{r_n} y_n)\}$ bị chặn. Do đó, từ $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$ và (3.5), ta nhận được

$$\phi(x_n - J_{r_n} x_n, y_n - J_{r_n} y_n) \rightarrow 0.$$

Từ Bổ đề 3.2, ta có $\|(x_n - y_n) - (J_{r_n} x_n - J_{r_n} y_n)\| \rightarrow 0$. Vì $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$, nên $\|J_{r_n} x_n - J_{r_n} y_n\| \rightarrow 0$. $\square$

Tiếp theo, ta có các kết quả dưới đây.

Mệnh đề 3.1. Trong (3.3), với mọi $n \geq 1$, ta đều có $S \subset C_n \cap D_n \cap Q_n$.

Chứng minh. Trước hết, ta chỉ ra $S \subset C_n$ với mọi $n \geq 1$. Thật vậy, lấy $z \in S$, từ (3.3), ta có

$$j_E(x_n - z_n) = r_n T^*(J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n)).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} \langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle &= r_n \langle Tx_n - Tz, J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n) \rangle \\ &= r_n \|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\|^2 \\ &\quad + r_n \langle Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n - Tz, J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n) \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Từ định nghĩa của $Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n$ suy ra

$$\frac{1}{\mu_n} J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n) \in B_{j_n} Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n. \quad (3.7)$$

Từ tính đơn điệu của B_{j_n} và $0 \in B_{j_n} Tz$, ta nhận được

$$\langle Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n - Tz, J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n) \rangle \geq 0. \quad (3.8)$$

Do đó, từ (3.6) và (3.8), ta thu được

$$\langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\|^2,$$

tức là $S \subset C_n$.

Bây giờ, ta chỉ ra $S \subset D_n$ với mọi $n \geq 1$. Thật vậy, từ định nghĩa của $J_{\lambda_n}^{i_n} z_n$, ta có

$$\frac{1}{\lambda_n} J_E(z_n - y_n) \in A_{i_n} y_n. \quad (3.9)$$

Từ tính đơn điệu của A_{i_n} , (3.9) và $0 \in A_{i_n} z$, ta có

$$\langle y_n - z, J_E(z_n - y_n) \rangle \geq 0,$$

tức là $S \subset D_n$.

Cuối cùng, ta chỉ ra $S \subset Q_n$ bằng quy nạp. Thật vậy, $Q_1 = E$, nên $S \subset Q_1$. Giả sử $S \subset Q_k$ với $k \geq 1$. Khi đó $S \subset C_k \cap D_k \cap Q_k$. Từ $x_{k+1} = P_{C_k \cap D_k \cap Q_k}$, ta có $x_{k+1} \in Q_k$ và từ Bổ đề 3.3 suy ra

$$\langle x_{k+1} - z, J_E(x_1 - x_{k+1}) \rangle \geq 0,$$

với mọi $z \in C_k \cap D_k \cap Q_k$. Vì $S \subset C_k \cap D_k \cap Q_k$, nên ta được

$$\langle x_{k+1} - z, J_E(x_1 - x_{k+1}) \rangle \geq 0, \quad (3.10)$$

với mọi $z \in S$. Từ định nghĩa của Q_{k+1} , ta có $z \in Q_{k+1}$, tức là $S \subset Q_{k+1}$. Vậy $S \subset Q_n$ với mọi $n \geq 1$. $\square$

Mệnh đề 3.2. Trong (3.3), ta có $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 3.1 suy ra dãy $\{x_n\}$ trong (3.3) là hoàn toàn xác định. Vì S là tập con lồi, đóng và khác rỗng của E , nên tồn tại $z_0 \in S$ sao cho $z_0 = P_S x_1$.

Từ $x_{n+1} = P_{C_n \cap D_n \cap Q_n} x_1$, ta có

$$\|x_{n+1} - x_1\| \leq \|x_1 - y\|, \quad (3.11)$$

với mọi $y \in C_n \cap D_n \cap Q_n$. Vì $z_0 \in S \subset C_n \cap D_n \cap Q_n$, nên

$$\|x_{n+1} - x_1\| \leq \|x_1 - z_0\|, \quad (3.12)$$

điều này suy ra dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Từ $x_{n+1} \in Q_n$, ta có

$$\langle x_n - x_{n+1}, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0.$$

Suy ra

$$\|x_{n+1} - x_1\| \geq \|x_n - x_1\|,$$

kết hợp với tính bị chặn của $\{x_n\}$, suy ra tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_1\| = l$.

Rõ ràng x_n và x_{n+1} thuộc Q_n . Do đó, từ tính lồi của Q_n , suy ra $\frac{x_n + x_{n+1}}{2} \in Q_n$. Vì $x_n = P_{Q_n} x_1$, nên

$$\|x_n - x_1\| \leq \|x_1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\| \leq \frac{1}{2}(\|x_n - x_1\| + \|x_{n+1} - x_1\|)$$

và do đó

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_1 - \frac{x_n + x_{n+1}}{2}\| = l.$$

Vì E là không gian lồi đều, nên ta nhận được $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. $\square$

Mệnh đề 3.3. Trong (3.3), ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^j Tx_n)\| = 0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, M$.

Chứng minh. Từ (3.3), ta có

$$J_E(x_n - z_n) = r_n T^*(J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n)). \quad (3.13)$$

Vì $\{x_n\}$ bị chặn và T là tuyến tính bị chặn, nên $\{Tx_n\}$ cũng bị chặn. Do đó, từ Bổ đề 3.4, ta nhận được $\{Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\}$ bị chặn và do đó $\{J_E(x_n - z_n)\}$ cũng bị chặn.

Vì $x_{n+1} \in C_n$, nên

$$\langle x_n - x_{n+1}, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\|^2.$$

Từ tính bị chặn của $\{J_E(x_n - z_n)\}$, $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ và $r_n \geq a > 0$, suy ra

$$\|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\| \rightarrow 0.$$

Do đó, từ (3.13), ta nhận được $\|J_E(x_n - z_n)\| \rightarrow 0$ và vì vậy

$$\|x_n - z_n\| \rightarrow 0. \quad (3.14)$$

Từ định nghĩa của z_n , ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_{j,n}\| = 0, \quad (3.15)$$

với mọi $j = 1, 2, \dots, M$.

Do vậy, từ các bất đẳng thức

$$J_E(x_n - z_{j,n}) = r_n T^*(J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^j Tx_n)), \quad j = 1, 2, \dots, M$$

và $r_n \geq a > 0$, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^j Tx_n)\| = 0$$

với mọi $j = 1, 2, \dots, M$. □

Mệnh đề 3.4. Trong (3.3), ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_E(z_{j,n} - J_{\lambda_n}^i z_{j,n})\| = 0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$ và $j = 1, 2, \dots, M$.

Chứng minh. Từ định nghĩa của D_n , ta có $y_n = P_{D_n} z_n$ và do đó ta nhận được

$$\|y_n - z_n\| \leq \|y - z_n\|$$

với mọi $y \in D_n$. Từ bất đẳng thức trên và $x_{n+1} \in D_n$, ta có

$$\|y_n - z_n\| \leq \|x_{n+1} - z_n\|.$$

Do đó, từ Mệnh đề 3.2 và $\|x_n - z_n\| \rightarrow 0$, ta thu được

$$\|y_n - z_n\| \rightarrow 0.$$

Từ định nghĩa của y_n , ta có

$$\|z_n - y_{i,n}\| \rightarrow 0$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, tức là

$$\|z_n - J_{\lambda_n}^i z_n\| \rightarrow 0, \tag{3.16}$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$.

Từ (3.14) và (3.15), ta có

$$\|z_n - z_{j,n}\| \rightarrow 0 \tag{3.17}$$

với mọi $j = 1, 2, \dots, M$. Từ Bổ đề 3.5, ta được

$$\|J_{\lambda_n}^i z_n - J_{\lambda_n}^i z_{j,n}\| \rightarrow 0, \tag{3.18}$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$ và $j = 1, 2, \dots, M$.

Do đó, từ (3.16)-(3.18), ta thu được

$$\|z_{j,n} - J_{\lambda_n}^i z_{j,n}\| \rightarrow 0, \tag{3.19}$$

và vì vậy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_E(z_{j,n} - J_{\lambda_n}^i z_{j,n})\| = 0,$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$ và $j = 1, 2, \dots, M$. □

Sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (3.3) được cho bởi định lý sau:

Định lý 3.2. *Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (3.3) hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, trong đó $z_0 = P_S x_1$.*

Chứng minh. Vì $\{x_n\}$ bị chặn, nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ yếu về $w \in E$. Ta sẽ chỉ ra $w \in S$.

Từ (3.15), ta có $z_{j,n_k} \rightharpoonup w$ khi $k \rightarrow \infty$, với mọi $j = 1, 2, \dots, M$. Từ (3.19) suy ra $J_{\lambda_n}^i z_{j,n_k} \rightharpoonup w$ khi $k \rightarrow \infty$, với mọi $j = 1, 2, \dots, M$ và $i = 1, 2, \dots, N$. Từ định nghĩa của $J_{\lambda_{n_k}}^i$, ta có

$$\frac{J_E(z_{j,n_k} - J_{\lambda_{n_k}}^i z_{j,n_k})}{\lambda_{n_k}} \in A_i J_{\lambda_{n_k}}^i z_{j,n_k}.$$

Từ tính đơn điệu của A_i , ta có

$$\left\langle s - J_{\lambda_{n_k}}^i z_{j,n_k}, t^* - \frac{J_E(z_{j,n_k} - J_{\lambda_{n_k}}^i z_{j,n_k})}{\lambda_{n_k}} \right\rangle \geq 0,$$

với mọi $(s, t^*) \in A_i$. Vì $\lim_{k \rightarrow \infty} \|J_E(z_{j,n_k} - J_{\lambda_{n_k}}^i z_{j,n_k})\| = 0$ và $0 < b \leq \lambda_{n_k}$, nên ta nhận được $\langle s - w, t^* - 0 \rangle \geq 0$, với mọi $(s, t^*) \in A_i$. Vì A_i là đơn điệu cực đại, nên $w \in A_i^{-1}0$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$.

Vì T là toán tử tuyến tính bị chặn, nên $Tx_{n_k} \rightharpoonup Tw$ khi $k \rightarrow \infty$. Từ Mệnh đề 3.3, ta có $Q_{\mu_{n_k}}^j Tx_{n_k} \rightharpoonup Tw$ khi $k \rightarrow \infty$. Từ định nghĩa của $Q_{\mu_{n_k}}^j$, ta nhận được

$$\frac{J_F(Tx_{n_k} - Q_{\mu_{n_k}}^j Tx_{n_k})}{\mu_{n_k}} \in B_j Q_{\mu_{n_k}}^j Tx_{n_k}.$$

Từ tính đơn điệu của B_j suy ra

$$\left\langle u - Tx_{n_k}, v^* - \frac{J_F(Tx_{n_k} - Q_{\mu_{n_k}}^j Tx_{n_k})}{\mu_{n_k}} \right\rangle \geq 0,$$

với mọi $(u, v^*) \in B_j$. Vì $\|J_F(Tx_{n_k} - Q_{\mu_{n_k}}^j Tx_{n_k})\| \rightarrow 0$ và $0 < b \leq \mu_{n_k}$, nên $\langle u - Tw, v^* - 0 \rangle \geq 0$ với mọi $(u, v^*) \in B_j$. Do B_j là đơn điệu cực đại, nên $Tw \in B_j^{-1}0$ với mọi $j = 1, 2, \dots, M$, tức là $w \in T^{-1}(\cap_{j=1}^M B_j^{-1}0)$. Suy ra, $w \in S$.

Tiếp theo, từ $z_0 = P_S x_1$, $w \in S$ và (3.12), ta có

$$\begin{aligned} \|x_1 - z_0\| &\leq \|x_1 - w\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|x_1 - x_{n_k}\| \\ &\leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_1 - x_{n_k}\| \end{aligned}$$

$$\leq \|x_1 - z_0\|.$$

Từ đó, ta nhận được

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_1 - x_{n_k}\| = \|x_1 - w\| = \|x_1 - z_0\|.$$

Từ định nghĩa của z_0 , ta có $z_0 = w$. Từ tính chất Kadec-Klee của E , ta thu được $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = z_0$. Bởi tính duy nhất của z_0 , nên $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $z_0 = P_S x_1$ khi $n \rightarrow \infty$. $\square$

Từ Định lý 3.2, ta có kết quả dưới đây cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Banach.

Định lý 3.3. *Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn và cho J_E là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E . Cho A_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là các toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} . Cho J_λ^i là giải metric của A_i với $\lambda > 0$. Giả sử $S = \cap_{i=1}^N A_i^{-1} 0 \neq \emptyset$. Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi*

$$\begin{aligned} y_{i,n} &= J_{\lambda_n}^i x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|y_{i_n,n} - x_n\| &= \max_{i=1,\dots,N} \|y_{i,n} - x_n\|, \quad \text{đặt } y_n = y_{i_n,n}, \\ D_n &= \{z \in E : \langle y_n - z, J_E(x_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ Q_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{D_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{3.20}$$

trong đó $\{\lambda_n\}$ và $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức

$$0 < a \leq \lambda_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, với $z_0 = P_S x_1$.

3.2. Ứng dụng

3.2.1. Bài toán điểm cực tiểu tách

Cho E là một không gian Banach và cho $f : E \rightarrow (-\infty, \infty]$ là một hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới. Dưới vi phân của f là ánh xạ đa trị $\partial f : E \rightarrow 2^{E^*}$ được xác định bởi

$$\partial f(x) = \{g \in E^* : f(y) - f(x) \geq \langle y - x, g \rangle, \quad \forall y \in E\}$$

với mọi $x \in E$. Ta biết rằng ∂f là toán tử đơn điệu cực đại (xem [56]) và $x_0 \in \arg \min_E f(x)$ khi và chỉ khi $\partial f(x_0) \ni 0$.

Ta có định lý sau:

Định lý 3.4. Cho f_i , $i = 1, 2, \dots, N$ và g_j , $j = 1, 2, \dots, M$ là các hàm lồi, chính thường, nửa liên tục dưới từ E vào $(-\infty, \infty]$ và F vào $(-\infty, \infty]$, tương ứng. Giả sử $S = \cap_{i=1}^N (\partial f_i)^{-1}0 \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^M (\partial g_j)^{-1}0) \neq \emptyset$. Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy xác định bởi

$$\begin{aligned}
t_{j,n} &= \arg \min_{y \in F} \{g_j(y) + \frac{1}{2\mu_n} \|y - Tx_n\|^2\}, \\
z_{j,n} &= x_n - r_n J_E^{-1} T^* (J_F(Tx_n - t_{j,n})), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\
\text{Chọn } j_n \text{ sao cho } \|z_{j_n,n} - x_n\| &= \max_{j=1,\dots,M} \|z_{j,n} - x_n\|, \text{ đặt } z_n = z_{j_n,n}, \\
y_{i,n} &= \arg \min_{y \in E} \{f_i(y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - z_n\|^2\}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
\text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|y_{i_n,n} - z_n\| &= \max_{i=1,\dots,N} \|y_{i,n} - z_n\|, \text{ đặt } y_n = y_{i_n,n}, \\
C_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - t_{j_n,n}\|^2\}, \\
D_n &= \{z \in E : \langle y_n - z, J_E(z_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\
Q_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\
x_{n+1} &= P_{C_n \cap D_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

trong đó $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ và $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$0 < a \leq r_n, \text{ and } 0 < b \leq \lambda_n, \mu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, với $z_0 = P_S x_1$.

Chứng minh. Ta có

$$t_{j,n} = \arg \min_{y \in F} \{g_j(y) + \frac{1}{2\mu_n} \|y - Tx_n\|^2\}$$

khi và chỉ khi

$$\partial g_j(t_{j,n}) + \frac{1}{\mu_n} J_F(t_{j,n} - Tx_n) \ni 0.$$

Suy ra

$$t_{j,n} = Q_{\mu_n}^j Tx_n,$$

trong đó $Q_{\mu_n}^j$ là giải mêtric của $B_j = \partial g_j$.

Tương tự, ta có

$$y_{i,n} = \arg \min_{y \in E} \{f_i(y) + \frac{1}{2\lambda_n} \|y - z_n\|^2\},$$

khi và chỉ khi

$$y_{i,n} = J_{\lambda_n}^i z_n,$$

trong đó $J_{\lambda_n}^i$ là giải mêtric của $A_i = \partial f_i$. Do đó, áp dụng Định lý 3.2 ta nhận được điều phải chứng minh. $\square$

3.2.2. Bài toán chấp nhận tách

Từ Định lý 3.4, ta có kết quả sau:

Định lý 3.5. Cho L_i , $i = 1, 2, \dots, N$ và K_j , $j = 1, 2, \dots, M$ là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của E và F , trong ứng. Giả sử $S = \cap_{i=1}^N L_i \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^M K_j) \neq \emptyset$. Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$\begin{aligned}
 z_{j,n} &= x_n - r_n J_E^{-1} T^* (J_F(Tx_n - P_{K_j} Tx_n)), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\
 \text{Chọn } j_n \text{ sao cho } \|z_{j_n,n} - x_n\| &= \max_{j=1,\dots,M} \|z_{j,n} - x_n\|, \text{ đặt } z_n = z_{j_n,n}, \\
 y_{i,n} &= P_{L_i} z_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
 \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|y_{i_n,n} - z_n\| &= \max_{i=1,\dots,N} \|y_{i,n} - z_n\|, \text{ đặt } y_n = y_{i_n,n}, \\
 C_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - P_{K_{j_n}} Tx_n\|^2\}, \\
 D_n &= \{z \in E : \langle y_n - z, J_E(z_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\
 Q_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\
 x_{n+1} &= P_{C_n \cap D_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1,
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

trong đó $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ và $a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau

$$0 < a \leq r_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, với $z_0 = P_S x_1$.

3.3. Ví dụ số minh họa

Cho $H_1 = \mathbb{R}^3$ và $H_2 = \mathbb{R}^2$ và cho $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ là một ánh xạ được xác định bởi

$$T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 4x_3),$$

với mọi $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Dễ thấy T là toán tử tuyến tính bị chặn, $\|T\| = 4$ và toán tử liên hợp $T^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ của T được xác định bởi

$$T^*(x_1, x_2) = (4x_1, 0, 4x_2),$$

với mọi $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Cho

$$L_i = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) \in [0, i] \times [-i, 2i - 1] \times [1 - i, 1 + i]\},$$

$$K_j = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1, x_2) \in [1 - j, j] \times [0, 1 + j]\},$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, 100$ và $j = 1, 2, \dots, 50$.

Xét bài toán:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in S = \cap_{i=1}^{100} L_i \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^{50} K_j). \quad (3.23)$$

Dễ thấy $\cap_{i=1}^{100} L_i = [0, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$ và $\cap_{j=1}^{50} K_j = [0, 1] \times [0, 2]$. Do đó,

$$S = [0, 1/4] \times [-1, 1] \times [0, 1/2].$$

Ta có, nếu $x_1 = (1, 2, 3)$ thì $z_0 = P_S x_1 = (1/4, 1, 1/2)$ và nếu $x_1 = (-1, -2, 3)$ thì $z_0 = P_S x_1 = (0, -1, 1/2)$.

Áp dụng phương pháp lặp (3.3) với $r_n = 1/16$, ta nhận được bảng kết quả sau:

$x_1 = (1, 2, 3)$			
TOL	n	$\ x_n - x^*\ $	x_n
10^{-2}	9	0.005097	(0.251464, 1, 0.504882)
10^{-3}	68	0.000995	(0.250452, 1.000289, 0.500838)
10^{-4}	278	7.26×10^{-5}	(0.250062, 1.000011, 0.500035)
10^{-5}	1441	9.55×10^{-6}	(0.250008, 1, 0.500004)
$x_1 = (-1, -2, 3)$			
TOL	n	$\ x_n - x^*\ $	x_n
10^{-2}	9	0.005258	(-0.001953, -1, 0.504882)
10^{-3}	43	0.000485	(-0.000303, -1, 0.500379)
10^{-4}	321	6.74×10^{-5}	(-6.03 $\times 10^{-5}$, -1, 0.500030)
10^{-5}	2772	9.64×10^{-6}	(-4.30 $\times 10^{-6}$, -1.000003, 0.500008)

Bảng 3.1

Chú ý 3.1. Ta ký hiệu TOL là sai số giữa nghiệm xấp xỉ x_n và nghiệm chính xác x^* , tức là $\text{TOL} = \|x_n - x^*\|$.

Chương 4

Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh

Trong chương này, chúng tôi đề cập đến hai phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ cùng với một số ứng dụng cho các bài toán liên quan (bài toán chấp nhận lỗi, bài toán tìm không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại, bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân).

4.1. Phương pháp lặp song song

Cho X là một không gian Banach phản xạ và cho $T_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$, là N toán tử BSNE với $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ và $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X .

Từ ý tưởng của P.K. Anh và C.V. Chung trong tài liệu [3], chúng tôi đề xuất hai phương pháp lặp song song mới cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ. Ta có định lý sau:

Định lý 4.1. *Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n^i = T_i x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in X : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in X : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.1)$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $\operatorname{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Chứng minh. **Bước 1.** C_n và Q_n là các tập con lồi và đóng của X với mọi $n \in \mathbb{N}$.
Thật vậy, ta viết C_n và Q_n ở các dạng

$$\begin{aligned} C_n &= \{z \in X : \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(\bar{y}_n), z \rangle \leq f(\bar{y}_n) - f(x_n) \\ &\quad + \langle \nabla f(x_0), x_n \rangle - \langle \nabla f(\bar{y}_n), \bar{y}_n \rangle, \\ Q_n &= \{z \in X : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z \rangle \leq \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), x_n \rangle\}. \end{aligned}$$

Suy ra C_n và Q_n là các tập con lồi và đóng của X . Do đó, $C_n \cap Q_n$ cũng là tập con lồi và đóng của X với mọi $n \geq 0$.

Bước 2. Dãy $\{x_n\}$ hoàn toàn xác định.

Trước hết, ta chỉ ra rằng $F \subset C_n \cap Q_n$ với mọi n . Lấy $p \in F$, với mỗi n , ta có

$$D_f(p, \bar{y}_n) = D_f(p, T_{in}x_n) \leq D_f(p, x_n),$$

điều này suy ra $p \in C_n$. Vậy, $F \subset C_n$ với mọi $n \geq 0$. Từ định nghĩa của Q_n , ta có $F \subset Q_0$. Do đó, $F \subset C_0 \cap Q_0$ và suy ra $x_1 = \text{proj}_{C_0 \cap Q_0}^f(x_0)$ hoàn toàn xác định. Giả sử rằng $F \subset C_{n-1} \cap Q_{n-1}$ với $n \geq 1$. Khi đó $x_n = \text{proj}_{C_{n-1} \cap Q_{n-1}}^f(x_0)$ là hoàn toàn xác định, vì $C_{n-1} \cap Q_{n-1}$ là tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Từ Bổ đề 1.14 ii), ta có

$$\langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), y - x_n \rangle \leq 0,$$

với mọi $y \in C_{n-1} \cap Q_{n-1}$. Do đó, từ định nghĩa của Q_n , ta nhận được $C_{n-1} \cap Q_{n-1} \subset Q_n$ hay ta có $F \subset Q_n$. Suy ra $F \subset C_n \cap Q_n$ và do đó $x_{n+1} = \text{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0)$ cũng hoàn toàn xác định.

Bước 3. Dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Từ định nghĩa của Q_n và Bổ đề 1.14 ii), ta có $x_n = \text{proj}_{Q_n}^f(x_0)$. Theo Bổ đề 1.14 iii), với mỗi $p \in F$, ta có

$$\begin{aligned} D_f(x_n, x_0) &= D_f(\text{proj}_{Q_n}^f(x_0), x_0) \\ &\leq D_f(p, x_0) - D_f(p, \text{proj}_{Q_n}^f(x_0)) \\ &\leq D_f(p, x_0), \end{aligned} \tag{4.2}$$

điều này suy ra dãy $\{D_f(x_n, x_0)\}$ bị chặn. Từ Bổ đề 1.15, ta nhận được dãy $\{x_n\}$ cũng bị chặn.

Bước 4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - \bar{y}_n\| = 0$.

Vì $x_n = \text{proj}_{Q_n}^f(x_0)$ và $x_{n+1} \in Q_n$, nên từ Bổ đề 1.14 iii) suy ra

$$D_f(x_{n+1}, \text{proj}_{Q_n}^f(x_0)) + D_f(\text{proj}_{Q_n}^f(x_0), x_0) \leq D_f(x_{n+1}, x_0)$$

và do đó

$$D_f(x_{n+1}, x_n) + D_f(x_n, x_0) \leq D_f(x_{n+1}, x_0). \quad (4.3)$$

Như vậy, dãy $\{D_f(x_n, x_0)\}$ là đơn điệu tăng và kết hợp với (4.2), ta nhận được giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(x_n, x_0)$ là tồn tại và hữu hạn. Từ (4.3) suy ra

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(x_{n+1}, x_n) = 0. \quad (4.4)$$

Từ Bổ đề 1.13, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0. \quad (4.5)$$

Từ định nghĩa của C_n và $x_{n+1} \in C_n$, ta có

$$D_f(x_{n+1}, \bar{y}_n) \leq D_f(x_{n+1}, x_n),$$

và kết hợp với (4.5), ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(x_{n+1}, \bar{y}_n) = 0. \quad (4.6)$$

Do đó, từ Bổ đề 1.13, ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - \bar{y}_n\| = 0. \quad (4.7)$$

Từ (4.5), (4.7) và bất đẳng thức

$$\|x_n - \bar{y}_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - \bar{y}_n\|,$$

suy ra $\|x_n - \bar{y}_n\| \rightarrow 0$, as $n \rightarrow \infty$.

Bước 5. Mọi giới hạn yếu của dãy $\{x_n\}$ đều thuộc F .

Từ Bổ đề 1.10, ta có f liên tục đều. Do đó, từ tính bị chặn của $\{\nabla f(x_n)\}$ và từ định nghĩa của $D_f(\bar{y}_n, x_n)$, ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(\bar{y}_n, x_n) = 0.$$

Do vậy, từ định nghĩa của $\bar{y}_n$, ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(y_n^i, x_n) = 0$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Từ Bổ đề 1.13 suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n^i\| = 0, \quad (4.8)$$

với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Từ (4.8) và Bổ đề 1.11, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla f(y_n^i) - \nabla f(x_n)\| = 0, \quad (4.9)$$

với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Với mỗi $p \in F$ và với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$, ta có

$$\begin{aligned} D_f(p, x_n) - D_f(p, y_n^i) &= f(y_n^i) - f(x_n) \\ &\quad + \langle \nabla f(y_n^i) - \nabla f(x_n), p - x_n \rangle + \langle \nabla f(y_n^i), x_n - y_n^i \rangle. \end{aligned}$$

Vì $\{y_n^i\}$ bị chặn, nên $\{\nabla f(y_n^i)\}$ cũng bị chặn. Do đó, từ bất đẳng thức trên, (4.8) và (4.9), ta nhận được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D_f(p, x_n) - D_f(p, y_n^i)) = 0$$

tức là,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (D_f(p, x_n) - D_f(p, T_i x_n)) = 0, \quad (4.10)$$

với mọi $p \in F$ và mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Vì, T_i là toán tử BSNE và $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$, nên

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_f(T_i x_n, x_n) = 0, \quad (4.11)$$

với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Do đó, nếu $\{x_{n_k}\}$ là một dãy con bất kỳ của $\{x_n\}$ hội tụ yếu về v , thì $v \in \hat{F}(T_i) = F(T_i)$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. Vì vậy, $v \in F$, tức là mọi giới hạn yếu của $\{x_n\}$ thuộc F .

Bước 6. Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

Đặt $x^\dagger = \text{proj}_F^f(x_0)$. Vì $x_{n+1} = \text{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0)$ và $F \subset C_n \cap Q_n$, nên ta có $D_f(x_{n+1}, x_0) \leq D_f(x^\dagger, x_0)$. Từ đẳng thức ba điểm, ta có

$$\begin{aligned} D_f(x_n, x^\dagger) &= D_f(x_n, x_0) + D_f(x_0, x^\dagger) - \langle \nabla f(x^\dagger) - \nabla f(x_0), x_n - x_0 \rangle \\ &\leq D_f(x^\dagger, x_0) + D_f(x_0, x^\dagger) - \langle \nabla f(x^\dagger) - \nabla f(x_0), x_n - x_0 \rangle \\ &= \langle \nabla f(x^\dagger) - \nabla f(x_0), x^\dagger - x_n \rangle. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vì, $\{x_n\}$ bị chặn, nên tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của $\{x_n\}$ hội tụ yếu về phần tử $u \in X$. Từ Bước 5, ta có $u \in F$. Do đó, từ Bổ đề 1.14 ii) và (4.12), ta nhận được

$$\begin{aligned} \limsup_{k \rightarrow +\infty} D_f(x_{n_k}, x^\dagger) &\leq \limsup_{k \rightarrow +\infty} \langle \nabla f(x^\dagger) - \nabla f(x_0), x^\dagger - x_{n_k} \rangle \\ &= \langle \nabla f(x^\dagger) - \nabla f(x_0), x^\dagger - u \rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} D_f(x_{n_k}, x^\dagger) = 0.$$

Từ Bổ đề 1.13, $\{x_{n_k}\}$ hội tụ mạnh về $x^\dagger$. Giả sử rằng $\{x_{n_l}\}$ là một dãy con khác của $\{x_n\}$, hội tụ mạnh về phần tử u' . Ta có, $\{x_{n_l}\}$ hội tụ yếu về u' . Bằng lập

luận tương tự như trên, ta nhận được $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $x^\dagger$. Do đó, $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $x^\dagger$, khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý được chứng minh. $\square$

Chú ý 4.1. Nếu trong phương pháp lặp (4.1), $x_{n+1} = x_n = x^\dagger$, thì $x^\dagger$ là một điểm bất động chung của $T_1, T_2, \dots, T_N$, tức là quá trình lặp (4.1) kết thúc ở bước lặp thứ $n < +\infty$.

Gần đây, P.K. Anh và D.V. Hieu [4] đã đưa ra hai phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm một phần tử chung của tập điểm bất động của một họ ánh xạ ϕ -tự không giãn tiệm cận, tập nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân và tập nghiệm của bài toán cân bằng trong không gian Banach trơn đều và 2-lồi đều.

Ta cũng có kết quả dưới đây:

Định lý 4.2. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} C_0 = X, \\ y_n^i = T_i x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_{C_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.13)$$

hội tụ mạnh về $\operatorname{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Chứng minh. **Bước 1.** C_n là các tập con lồi và đóng của X với mọi $n \geq 0$.

Rõ ràng rằng C_0 là một tập lồi và đóng, vì $C_0 = X$. Giả sử rằng C_n là tập con lồi và đóng của X với $n \geq 0$. Ta có

$$\begin{aligned} C_{n+1} = C_n \cap \{z \in X : \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(\bar{y}_n), z \rangle \leq f(\bar{y}_n) - f(x_n) \\ + \langle \nabla f(x), x_n \rangle - \langle \nabla f(\bar{y}_n), \bar{y}_n \rangle, \end{aligned}$$

điều này suy ra C_{n+1} là tập con lồi và đóng của X . Do đó, từ cách xây dựng tập C_n , suy ra C_n là tập con lồi và đóng của X với mọi $n \geq 0$.

Bước 2. Dãy $\{x_n\}$ hoàn toàn xác định.

Rõ ràng rằng C_n là tập lồi, đóng và $F \subset C_0$. Giả sử $F \subset C_n$ với $n \geq 0$. Lấy $p \in F$ và với mọi $n \geq 0$, ta có

$$D_f(p, \bar{y}_n) = D_f(p, T_{i_n} x_n) \leq D_f(p, x_n),$$

điều này suy ra $p \in C_{n+1}$. Do đó, bằng qui nạp, ta nhận được $p \in C_n$ với mọi $n \geq 0$. Suy ra, $F \subset C_n$ với mọi $n \geq 0$. Vì vậy, dãy $\{x_n\}$ hoàn toàn xác định.

Bước 3. Dãy $\{x_n\}$ bị chặn.

Với mỗi $p \in F$, Từ Bổ đề 1.14 iii), ta có

$$\begin{aligned} D_f(x_n, x_0) &= D_f(\text{proj}_{C_n}^f(x_0), x_0) \\ &\leq D_f(p, x_0) - D_f(p, \text{proj}_{C_n}^f(x_0)) \\ &\leq D_f(p, x_0), \end{aligned} \quad (4.14)$$

điều này suy ra dãy $\{D_f(x_n, x_0)\}$ bị chặn. Do đó, từ Bổ đề 1.15, dãy $\{x_n\}$ cũng bị chặn.

Bước 4. Tồn tại giới hạn hữu hạn của dãy $\{D_f(x_n, x_0)\}$.

Vì $C_{n+1} \subset C_n$, nên từ Bổ đề 1.14 iii) suy ra

$$D_f(x_{n+1}, \text{proj}_{C_n}^f(x_0)) + D_f(\text{proj}_{C_n}^f(x_0), x_0) \leq D_f(x_{n+1}, x_0),$$

và do đó

$$D_f(x_{n+1}, x_n) + D_f(x_n, x_0) \leq D_f(x_{n+1}, x_0). \quad (4.15)$$

Suy ra $\{D_f(x_n, x_0)\}$ là dãy đơn điệu tăng và kết hợp với (4.14), ta thu được giới hạn $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_f(x_n, x_0)$ là tồn tại và hữu hạn.

Bước 5. Dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về phần tử $p \in X$.

Ta có $C_m \subset C_n$ với mọi $m \geq n$. Do đó, $x_m \in C_n$. Vì, $x_n = \text{proj}_{C_n}^f$, nên từ Bổ đề 1.14 iii) ta có

$$D_f(x_m, x_n) \leq D_f(x_m, x_0) - D_f(x_n, x_0) \rightarrow 0,$$

điều này suy ra $D_f(x_m, x_n) \rightarrow 0$ as $m, n \rightarrow +\infty$. Từ Bổ đề 1.13, $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$, khi $m, n \rightarrow +\infty$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy. Vì vậy, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về phần tử $p \in X$.

Bước 6. Ta chỉ ra $p \in F$.

Vì $\{x_n\}$ là dãy Cauchy, nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$. Từ $x_{n+1} \in C_{n+1}$ và định nghĩa của C_{n+1} , ta nhận được

$$\|x_{n+1} - \bar{y}_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Do đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_{n+1} - \bar{y}_n\| = 0$. Vì vậy, từ đánh giá

$$\|x_n - \bar{y}_n\| \leq \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_{n+1} - \bar{y}_n\|,$$

ta thu được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|x_n - \bar{y}_n\| = 0$. Từ định nghĩa của $\bar{y}_n$, ta nhận được

$$\|x_n - y_n^i\| \rightarrow 0,$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, N$.

Bởi lập luận tương tự như Bước 5 trong chứng minh của Định lý 4.1, ta có $p \in F$.

Bước 7. $p = \text{proj}_F^f(x_0)$.

Đặt $x^\dagger = \text{proj}_F^f(x_0)$. Vì $x_n = \text{proj}_{C_n}^f(x_0)$ và $F \subset C_n$, ta có $D_f(x_n, x_0) \leq D_f(x^\dagger, x_0)$. Do đó, bởi lập luận tương tự như Bước 6 trong chứng minh của Định lý 4.1, ta nhận được $p = x^\dagger$.

Định lý được chứng minh. $\square$

Chú ý 4.2. Nếu trong dãy lặp (4.13), $x_{n+1} = x_n = x^\dagger$, thì $x^\dagger$ là điểm bất động chung của $T_1, T_2, \dots, T_N$, tức là quá trình lặp (4.13) kết thúc ở bước lặp thứ $n < +\infty$.

4.2. Ứng dụng

Trong mục này, chúng tôi đưa ra một số ứng dụng của các định lý 4.1 và 4.2 cho một số bài toán liên quan.

4.2.1. Bài toán chấp nhận lỗi

Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X , sao cho $C = \cap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. bài toán chấp nhận lỗi (CFP) là xác định một phần tử trong C . Ta biết rằng $F(\text{proj}_{C_i}^f) = C_i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$. và nếu hàm Legendre f khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của X , thì phép chiếu Bregman $\text{proj}_{C_i}^f$ là toán tử BFNE và $F(\text{proj}_{C_i}^f) = \hat{F}(\text{proj}_{C_i}^f)$ (xem [53]). Do đó, nếu lấy $T_i = \text{proj}_{C_i}^f$ trong Định lý 4.1 và Định lý 4.2, thì ta nhận được hai thuật toán để giải bài toán chấp nhận lỗi.

Định lý 4.3. Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X , sao cho $C = \cap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.13) với $T_i = \text{proj}_{C_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_C^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2.2. Không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại

Cho $A : X \rightarrow 2^{X^*}$ là một toán tử đơn điệu cực đại. bài toán tìm một phần tử $x \in X$ sao cho $0 \in Ax$ đóng vai trò quan trọng trong lĩnh vực tối ưu và các lĩnh vực liên quan.

Nhắc lại toán tử giải của A , được ký hiệu là $\text{Res}_A^f : X \longrightarrow 2^X$ và được xác định như sau (xem [9]):

$$\text{Res}_A^f(x) = (\nabla f + A)^{-1} \circ \nabla f(x).$$

Bauschke và các cộng sự [9] đã chứng minh rằng toán tử giải này là toán tử BFNE. Nếu thêm điều kiện hàm Legendre f khả vi Fréchet đều và bị chặn trên mỗi tập con bị chặn của X , thì toán tử giải Res_A^f là toán tử BSNE và nó thỏa mãn $F(\text{Res}_A^f) = \hat{F}(\text{Res}_A^f)$ (xem [53]). Từ $F(\text{Res}_A^f) = A^{-1}0$, trong Định lý 4.1 và Định lý 4.2, nếu ta lấy $T_i = \text{Res}_{A_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, ta nhận được hai thuật toán cho bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn toán tử đơn điệu cực đại.

Định lý 4.4. *Cho $A_i : X \longrightarrow 2^{X^*}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử đơn điệu cực đại sao cho $F = \cap_{i=1}^N A_i^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.13) với $T_i = \text{Res}_{A_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.*

4.2.3. Bài toán cân bằng

Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Cho g là một song hàm xác định trên $C \times C$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Bài toán cân bằng được phát biểu như sau: Tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$g(x, y) \geq 0, \forall y \in C. \quad (4.16)$$

Ta ký hiệu $EP(g)$ là tập nghiệm của Bài toán (4.16). Để nghiên cứu Bài toán (4.16), ta cần đặt lên g một số giả thiết sau (xem [12]):

C1) $g(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

C2) g là đơn điệu, tức là, $g(x, y) + g(y, x) \leq 0$ với mọi $x, y \in C$;

C3) với mọi $x, y, z \in C$,

$$\limsup_{t \downarrow 0} g(tz + (1-t)x, y) \leq g(x, y);$$

C4) với mỗi $x \in C$, $g(x, \cdot)$ là hàm lồi, nửa liên tục dưới.

Toán tử giải của song hàm $g : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ (xem [26]) là $\text{Res}_g^f : X \longrightarrow 2^C$ và được xác định bởi

$$\text{Res}_g^f(x) = \{z \in C : g(z, y) + \langle \nabla f(z) - \nabla f(x), y - z \rangle \geq 0 \ \forall y \in C\}.$$

Ta cần các bổ đề dưới đây (xem [53]):

Bổ đề 4.1. *Cho $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm bực và khả vi Gâteaux đều. Cho C là một tập con lồi và đóng của X . Nếu song hàm $g : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện C1)-C4), thì $\text{dom}(\text{Res}_g^f) = X$.*

Bổ đề 4.2. *Cho $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là một hàm Legendre. Cho C là một tập con lồi và đóng của X . Nếu song hàm $g : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện C1)-C4), thì*

- i) Res_g^f là đơn trị;
- ii) Res_g^f là toán tử BFNE;
- iii) tập điểm bất động của Res_g^f là tập nghiệm của bài toán cân bằng, tức là, $F(\text{Res}_g^f) = EP(g)$;
- iv) $EP(g)$ là tập con lồi và đóng của C ;
- v) với mọi $x \in X$ và $u \in F(\text{Res}_g^f)$, ta có

$$D_f(u, \text{Res}_g^f(x)) + D_f(\text{Res}_g^f(x), x) \leq D_f(u, x).$$

Do đó, Từ các Bổ đề 4.1 và Bổ đề 4.2 suy ra rằng nếu $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bực, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X và nếu ta lấy $T_i = \text{Res}_{g_i}^f$, thì T_i là toán tử BSNE với $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ (xem [53], Bổ đề 1.3.2) và T_i có miền hữu hiệu là X . Do đó, ta có định lý sau:

Định lý 4.5. *Cho $C_i, i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Cho $g_i : C_i \times C_i \longrightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, N$ là N song hàm thỏa mãn các điều kiện C1-C4 sao cho $S = \cap_{i=1}^N EP(g_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bực, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.13) với $T_i = \text{Res}_{g_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.*

4.2.4. Không điểm chung của các toán tử Bregman ngược đơn điệu mạnh

Lớp các toán tử Bregman ngược đơn điệu mạnh được xây dựng bởi Butnariu và Kassay trong tài liệu [20]. Ta giả sử hàm Legendre f thỏa mãn điều kiện miền sau:

$$\text{ran } (\nabla f - A) \subset \text{ran } (\nabla f). \quad (4.17)$$

Một toán tử $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ được gọi là toán tử Bregman ngược đơn điệu mạnh (BISM) nếu $(\text{dom} A) \cap (\text{int dom} f) \neq \emptyset$ và với bất kỳ $x, y \in \text{int dom} f$, và nếu $\xi \in Ax$, $\eta \in Ay$, ta có

$$\langle \xi - \eta, \nabla f^*(\nabla f(x) - \xi) - \nabla f^*(\nabla f(y) - \eta) \rangle \geq 0.$$

Toán tử phản giải của A là $A^f : X \longrightarrow 2^X$ và được xác định bởi

$$A^f = \nabla f_o^*(\nabla f - A).$$

Ta biết rằng toán tử A là BISM nếu và chỉ nếu toán tử phản giải A^f của nó (đơn trị) là toán tử BFNE (xem [20], Bổ đề 3.5). Reich và các cộng sự đã chứng minh rằng nếu $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre và $A : X \longrightarrow 2^{X^*}$ là toán tử BISM sao cho $A^{-1}(0) \neq \emptyset$, thì $A^{-1}(0) = F(A^f)$ (xem [52], Mệnh đề 7). Do đó, nếu hàm Legendre f khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X , thì toán tử phản giải A^f là đơn trị và là toán tử BSNE thỏa mãn $F(A^f) = \hat{F}(A^f)$ (xem [53], Bổ đề 1.3.2).

Bây giờ, cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X và cho $A_i : X \longrightarrow 2^{X^*}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử BISM sao cho $C_i \subset \text{dom} A_i$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ và $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Từ điều kiện miền (4.17), ta có $\text{dom} A_i^f = (\text{dom} A) \cap (\text{int dom} f) = \text{dom} A_i$ vì trong trường hợp này $\text{int dom} f = X$. Từ Mệnh đề 7 i) trong tài liệu [53], ta nhận được $A^{-1}(0) = F(A^f)$. Do đó, ta có định lý sau:

Định lý 4.6. *Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X sao cho $C = \bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $A_i : X \longrightarrow 2^{X^*}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử BISM sao cho $C_i \subset \text{dom} A_i$ và $S = \bigcap_{i=1}^N A_i^{-1}(0) \neq \emptyset$. Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử điều kiện miền (4.17) được thỏa mãn với mỗi A_i . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.13) với $T_i = A_i^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.*

4.2.5. Bất đẳng thức biến phân

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân: Tìm một phần tử $x^\dagger \in C$ sao cho

$$\langle Ax^\dagger, y - x^\dagger \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C, \quad (4.18)$$

trong đó $A : X \longrightarrow X^*$ là toán tử BISM và C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\text{dom}A$. Ta ký hiệu $VI(C, A)$ là tập nghiệm của Bài toán (4.18).

Ta biết rằng (xem [52], Mệnh 8), Reich và các cộng sự đã chứng minh rằng nếu $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ là hàm Legendre và lồi hoàn toàn, thỏa mãn điều kiện miền (4.17) và $A : X \longrightarrow X^*$ là toán tử BISM, và nếu C là tập con lồi, đóng và khác rỗng của $\text{dom}A \cap \text{int dom}f$, thì $VI(A, C) = F(\text{proj}_C^f \circ A^f)$.

Ta biết rằng phép chiếu Begman proj_C^f là toán tử BSNE thỏa mãn tính chất $F(\text{proj}_C^f) = \hat{F}(\text{proj}_C^f)$. Do đó, từ Bổ đề 2 trong tài liệu [49], $\text{proj}_C^f \circ A^f$ là toán tử BSNE với $F(\text{proj}_C^f \circ A^f) = \hat{F}(\text{proj}_C^f \circ A^f)$. Vì vậy, ta có định lý sau:

Định lý 4.7. *Cho $C_i, i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X sao cho $C = \bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $A_i : X \longrightarrow X^*, i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử BISM sao cho $C_i \subset \text{dom}A_i$ và $S = \bigcap_{i=1}^N VI(C_i, A_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử điều kiện miền (4.17) được thỏa mãn với mỗi A_i . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.13) với $T_i = A_i^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.*

4.3. Hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát

Tiếp theo, ta biết rằng toán tử giải tương ứng với bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát là BFNE. Do đó, trong tài liệu [63] chúng tôi cũng đã nghiên cứu và đưa ra 03 phương pháp lặp song song tương tự như các phương pháp lặp trên cho bài toán tìm nghiệm chung của một hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát.

Cho X là một không gian Banach và cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của X .

Cho $\Theta : C \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ là một song hàm, $\Psi : X \longrightarrow X^*$ là một toán tử phi tuyến và $\varphi : C \longrightarrow \mathbb{R}$ là hàm số xác định trên C . Bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát được phát biểu như sau: Tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$\Theta(x, y) + \langle \Psi x, y - x \rangle + \varphi(y) \geq \varphi(x) \quad \forall y \in C. \quad (4.19)$$

Tập nghiệm của bài toán (4.19) được ký hiệu bởi $GMEP(\Theta, \varphi, \Psi)$, tức là

$$GMEP(\Theta, \varphi, \Psi) = \{x \in C : \Theta(x, y) + \langle \Psi x, y - x \rangle + \varphi(y) \geq \varphi(x) \quad \forall y \in C\}.$$

Cho $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$, cho $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các hàm số từ C vào $\mathbb{R}$ và cho $\Psi_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các toán tử từ X vào X^* . Xét hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát sau: Tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$x \in \cap_{i=1}^N GMEP(\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i).$$

Nếu $\Psi = 0$, thì Bài toán (4.19) trở thành bài toán cân bằng hỗn hợp (xem [23]) tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$\Theta(x, y) + \varphi(y) \geq \varphi(x) \quad \forall y \in C. \quad (4.20)$$

Ta dùng ký hiệu $MEP(\Theta)$ để chỉ tập nghiệm của Bài toán (4.20).

Nếu $\varphi = 0$, thì Bài toán (4.19) trở thành bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát (xem [60]) tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$\Theta(x, y) + \langle \Psi x, y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4.21)$$

Tập nghiệm của bài toán (4.21) được ký hiệu bởi $GEP(\Theta, \Psi)$.

Nếu $\Theta = 0$, thì Bài toán (4.19) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp kiểu Browder (xem [17]) tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$\langle \Psi x, y - x \rangle + \varphi(y) \geq \varphi(x) \quad \forall y \in C. \quad (4.22)$$

Tập nghiệm của Bài toán (4.22) được ký hiệu bởi $MVI(C, \varphi, \Psi)$.

Nếu $\varphi = 0$ và $\Psi = 0$, thì Bài toán (4.19) trở thành bài toán cân bằng (xem [12]) tìm một phần tử $x \in C$ sao cho

$$\Theta(x, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \quad (4.23)$$

Cho $C_i, i = 1, 2, \dots, N$ là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bức, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử $\Theta_i : C_i \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện C1)-C4), $\varphi_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi nửa liên tục dưới từ C_i vào $\mathbb{R}$ và $\Psi_i : C_i \rightarrow X^*$ là các toán tử đơn điệu, liên tục, với mọi $i = 1, 2, \dots, N$. Giả sử rằng $F = \cap_{i=1}^N GMEP(\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i) \neq \emptyset$.

Để giải bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát, ta cần một số giả thiết đặt lên song hàm $\Theta : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ như sau:

C1) $\Theta(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$;

C2) Θ là đơn điệu, tức là, $\Theta(x, y) + \Theta(y, x) \leq 0$ với mọi $x, y \in C$;

C3) với mọi $x, y, z \in C$,

$$\limsup_{t \downarrow 0} \Theta(tz + (1-t)x, y) \leq \Theta(x, y);$$

C4) với mỗi $x \in C$, $\Theta(x, \cdot)$ là hàm lồi và nửa liên tục dưới.

Chúng tôi đã thu được các kết quả dưới đây:

Định lý 4.8. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in X : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in X : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 4.9. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} C_0 = X, \\ y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{C_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.25)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 4.10. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} Q_0 = X, \\ y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(\bar{y}_n), z - \bar{y}_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{Q_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.26)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Kết luận

Trong đề tài, chúng tôi đã đạt được một số kết quả cơ bản sau:

- Trình bày một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach; một số phương pháp lặp để xấp xỉ không điểm của toán tử j -đơn điệu (phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm);
- Đề xuất phương pháp lai ghép xấp xỉ không điểm của một toán tử m - j -đơn điệu trong tài liệu [65];
- Trình bày kết quả đạt được của đề tài trong các bài báo [39] và [40] về phương pháp lặp luân phiên kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm và phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach;
- Đề xuất các phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn trong không gian Hilbert [66];
- Phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach [64];
- Trình bày hai phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh và hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ [62, 63];
- Đưa ra một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các bài toán liên quan, cùng với đó là một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các phương pháp.

Tài liệu tham khảo

- [1] Agarwal R. P., O'Regan D., Sahu D. R. (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer.
- [2] Ambrosetti A., Prodi G. (1993), *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3] Anh P. K., Chung C. V. (2014), “Parallel hybrid methods for a finite family of relatively nonexpansive mappings”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 35, pp. 649–664.
- [4] Anh P.K., Hieu D.V. (2016), “Parallel hybrid methods for variational inequalities, equilibrium problems and common fixed point problems”, *Vietnam J. Math.*, 44(2), pp. 351–374
- [5] Alber Y.I. (1996), “Metric and generalized projection operators in Banach spaces: properties and applications, In: Kartsatos, A.G. (ed.) Theory and Applications of Nonlinear Operator of Accretive and Monotone Type”, *Marcel Dekker, New York*, pp. 15–50.
- [6] Aoyama K., Kimura Y., Takahashi W., Toyoda M. (2007), “Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, 67, pp. 2350–2360.
- [7] Barbu V. (1976), *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Space*, Noordhoff, Groningen.
- [8] Bauschke H.H., Borwein J.M., Combettes P.L. (2001), “Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces”, *Commun. Contemp. Math.*, 3, pp. 615–647.
- [9] Bauschke H.H., Borwein J.M., Combettes P.L. (2003), “Bregman monotone optimization algorithms”, *SIAM J. Control Optim.*, 42, pp. 596–636.
- [10] Bauschke H. H., šková M. E., Reich S. (2004), “Projection and proximal point methods convergence results and counterexamples”, *Nonlinear Anal.*, 56, pp. 715–738.

- [11] Bauschke H. H., Combettes P.L., Reich S. (2005), “The asymptotic behavior of the composition of two resolvents”, *Nonlinear Anal.*, 60(2), pp. 283–301.
- [12] Blum E., Oettli W. (1994), “From optimization and variational inequalities to equilibrium problems”, *Math. Student*, 63, pp. 123–145.
- [13] Bonnans J.F., Shapiro A. (2000), *Perturbation Analysis of Optimization Problem*, Springer, New York.
- [14] Bregman L. M. (1965), “The method of successive projection for finding a common point of convex sets”, *Sov. Math. Dokl.*, 6, pp. 688–692.
- [15] Browder F. E. (1968), “Nonlinear maximal monotone operators in Banach spaces”, *Math. Ann.*, 175, pp. 89–113.
- [16] Browder F.E., Petryshyn W.V. (1967), “Construction of fixed points of nonlinear mappings in Hilbert space”, *J. Math. Anal. Appl.*, **20**, pp. 197–228.
- [17] Browder F.E. (1996), “Existence and approximation of solutions of nonlinear variational inequalities”, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 56, pp. 1080–1086.
- [18] Butnariu D., Iusem A.N. (2000), *Totally convex functions for fixed points computation and infinite dimensional optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- [19] Butnariu D., Resmerita E. (2006), “Bregman distances, totally convex functions and a method for solving operator equations in Banach spaces”, *Abstr. Appl. Anal.*, 2006, pp. 1–39.
- [20] Butnariu D., Kassay G. (2008), “A proximal-projection method for finding zeroes of set-valued operators”, *SIAM J. Control Optim.*, 47, pp. 2096–2136.
- [21] Ceng L.-C., Ansari Q.H., Yao J.-C. (2008), “Mann-type steepset-descent and modified hybrid steepset-descent methods for variational inequality in Banach spaces”, *Numerical Functional Analysis and Optim.*, **29**(9-10), pp. 987–1033.
- [22] Ceng L.-C., Ansari Q.H., Schaible S., Yao J.-C. (2012), “Hybrid viscosity approximation method for zeros of m -accretive operators in Banach spaces”, *Numerical Functional Analysis and Optim.*, **33**(2), pp. 142–165.

- [23] Ceng L.C., Yao J.C. (2008), “A hybrid iterative scheme for mixed equilibrium problems and fixed point problems”, *J. Comput. Appl. Math.*, 214, pp. 186–201.
- [24] Censor Y., Lent A. (1981), “An iterative row-action method for interval convex programming”, *J. Optim. Theory Appl.*, 34, pp. 321–353.
- [25] Censor Y., Reich S. (1996), “Iterations of paracontractions and firmly non-expansive operators with applications to feasibility and optimization”, *Optimization*, 37, pp. 323–339.
- [26] Combettes P.L., Hirstoaga S.A. (2005), “Equilibrium programming in Hilbert spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 6, pp. 117–136.
- [27] Chen R., Zhu Z. (2006), “Viscosity approximation fixed points for nonexpansive and m -accretive operators”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2006, pp. 1–10.
- [28] Chen R., Zhu Z. (2008), “Viscosity approximation method for accretive operator in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, 69, pp. 1356–1363.
- [29] Cui H., Su M. (2015), “On sufficient ensuring the norm convergence of an iterative sequence to zeros of accretive operators”, *Appl. Math. Comp.*, **258**, pp. 67–71.
- [30] Goebel K., Kirk W.A. (1990), *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge Stud. Adv. Math., 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK.
- [31] Goebel K., Reich S. (1984), *Uniform convexity, hyperbolic geometry and nonexpansive mappings*, Marcel Dekker, New York and Basel.
- [32] Güler O. (1991), “On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization”, *SIAM J. Contr. Optim.*, 29(2), pp. 403–419.
- [33] Goldstein A.A. (1964), “Convex programming in Hilbert space”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, pp. 709–710.
- [34] Hundal H. (2004), “An alternating projection that does not converge in norm”, *Nonlinear Anal.*, 57(1), pp. 35–61.
- [35] Jung J.S. (2006), “Viscosity approximation methods for family of finite non-expansive mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal. Appl.*, 64, pp. 2536–2552.

- [36] Jung J.S. (2010), “Convergence of composite iterative methods for finding zeros of accretive operators”, *Nonlinear Anal.*, 71, pp. 1736–1746.
- [37] Jung J.S. (2010), “Strong convergence of viscosity approximation methods for finding zeros of accretive operators in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, 72, pp. 449–459.
- [38] Kamimura S., Takahashi W. (2002), “Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space”, *SIAM. J. Optim.*, 13, pp. 938–945.
- [39] Kim J.K., Tuyen T.M. (2016), “Approximation common zero of two accretive operators in Banach spaces”, *Appl. Math. and Comp.*, 283, pp. 265–281.
- [40] Kim J.K., Tuyen T.M. (2017), “Alternating resolvent algorithms for finding a common zero of two accretive operators in Banach spaces”, *J. Korean Math. Soc.*, 54(6), pp. 1905–1926.
- [41] Kim T.H., Xu H. K. (2005), “Strong convergence of modified Mann iterations”, *Nonlinear Anal.*, 61, pp. 51–60.
- [42] Maingé P.E. (2008), “Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization”, *Set-Valued Anal.*, **16**, pp. 899–912.
- [43] Martinet B. (2004), “Regularisation d’équations variationnelles par approximations successives”, *Rev. Française Informat, Recherche Operationnelle.*, 4(1970), pp. 154–158.
- [44] Moudafi A. (2000), “Viscosity approximation methods for fixed-points problems”, *J. Math. Anal. Appl.*, 241, pp. 46–55.
- [45] Von Neumann J. (1930), “Best approximation in inner product space”, *N. 22 in Annals of Math. Studie.*, Princeton University Press.
- [46] Levitin E.S., Polyak B.T. (1966), “Constrained Minimization Method”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 6, pp. 1–50.
- [47] Petryshn W.V. (1970), “A characterization of strictly convexity of Banach spaces and other uses of duality mappings”, *J. Funct. Anal.*, 6, pp. 282–291.
- [48] Qin X., Su Y. (2007), “Approximation of a zero point of accretive operator in Banach spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, 329, pp. 415–424.

- [49] Reich S. (1996), “A weak convergence theorem for the alternating method with Bregman distances, in: Theory and Applications of Nonlinear Operators of Accretive and Monotone Type”, *Marcel Dekker, New York*, pp. 313–318.
- [50] Reich S., Sabach S. (2009), “A strong convergence theorem for a proximal type algorithm in reflexive Banach spaces”, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 10, pp. 471–485.
- [51] Reich S., Sabach S. (2010), “Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces”, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 31, pp. 22–44.
- [52] Reich S., Sabach S. (2010), “Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces”, *Nonlinear Analysis*, 73, pp. 122–135.
- [53] Reich S., Sabach S. (2011), “Existence and approximation of fixed points of Bregman firmly nonexpansive mappings in reflexive Banach spaces, in: Fixed-Point Algorithms for Inverse Problems in Science and Engineering”, *Springer, New York*, 49 , pp. 301–316.
- [54] Resmerita E. (2004), “On total convexity, Bregman projections and stability in Banach spaces”, *J. Convex Anal.*, 11, pp. 1–16.
- [55] Rockafellar R.T. (1966), ”Characterization of the subdifferentials of convex functions”, *Pacific J. Math.*, 17, pp. 497–510.
- [56] R.T. Rockafellar (1970), “On the maximality of sums of nonlinear monotone operators”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149, pp. 75–88.
- [57] Rockaffelar R.T. (1976), “Monotone operators and proximal point algorithm”, *SIAM Jour. on Contr. and Optim.*, 14, pp. 887–897.
- [58] Sahu D.R., Yao J.C. (2011), “The prox-Tikhonov regularization method for the proximal point algorithm in Banach spaces”, *J. Glob. Optim.*, 51, pp. 641-655.
Banach spaces”, *Optim.*, 65(2), pp. 281–287.
- [59] Takahashi W. (2015),“ The split common null point problem in Banach spaces”, *Arch. Math.*, 104, pp. 357–365.

- [60] Takahashi W., Toyoda M. (2003), “Weak convergence theorems for nonexpansive mappings and monotone mappings”, *J. Optim. Theory Appl.*, 118, pp. 417–428.
- [61] Takahashi W., Zembayashi K. (2009), “Strong and weak convergence theorems for equilibrium problems and relatively nonexpansive mappings in Banach spaces”, *Nonlinear Anal.*, 70, pp. 45–57.
- [62] Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3), pp. 1695–1710.
- [63] Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for solving systems of generalized mixed equilibrium problems in reflexive Banach spaces”, *Optimization*, 66 (4), pp. 623–639.
- [64] Tuyen T.M. (2017), “A strong convergence theorem for the split common null point problem in Banach spaces”, *Appl. Math. Optim.*, doi.org/10.1007/s00245-017-9427-z.
- [65] T.M. Tuyen (2017), “On the strong convergence theorem of the hybrid viscosity approximation method for zeros of m -accretive operators in Banach spaces”, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), pp. 287–299.
- [66] Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), “Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces”, *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.
- [67] Xu H.K. (2006), “Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators”, *J. Math. Anal. Appl.*, 314(2), pp. 631–643.
- [68] Xu H.K. (2004), “Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings”, *J. Math. Anal. Appl.*, 298, pp. 279–291.
- [69] Zeidler E. (1985), *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, III-Variational Methods and Optimization, Springer-Verlag.
- [70] Wong N.C., Sahu D.R., Yao J.C. (2008), “Solving variational inequalities involving nonexpansive type mappings”, *Nonlinear Anal.*, 69, pp. 125–159.