ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI TOÁN TỬ LOẠI ĐƠN ĐIỆU

Mã số: ĐH2016-TN06-02

Xác nhận của tổ chức chủ trì	**Chủ nhiệm đề tài**
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Nguyễn Song Hà

THÁI NGUYÊN - 2018

DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

I. Thành viên thực hiện đề tài

• PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

• TS. Bùi Việt Hương - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

• TS. Trần Xuân Quý - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

II. Đơn vị phối hợp thực hiện

• Viện CNTT, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam (Người đại diện đơn vị là GS.TS. Nguyễn Bường)

Mục lục

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach thực
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
E^{**}	không gian liên hợp thứ hai của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\emptyset$	tập hợp rỗng
$\forall$	với mọi
$\cap$ hoặc $\bigcap$	phép giao
$d(x, C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
P_C	phép chiếu mêtric từ E (hoặc H) lên C
I	ánh xạ đơn vị
$\langle x, x^* \rangle$	giá trị của $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của $x \in H$ và $y \in H$
x^T	chuyển vị của véctơ x
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
μ	giới hạn Banach
$\nabla\varphi(x)$	gradient của hàm $\varphi(x)$

$R(F)$	miền ảnh của ánh xạ F
$D(F)$	miền xác định của ánh xạ F
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\mathrm{VIP}(A, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân với $A : C \to H$
$Sol(\mathrm{VIP}(A, C))$	tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VI}(A, C)$
$\mathrm{VIP}^*(F, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân trên $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ với $F : E \to E$
$Sol(\mathrm{VIP}^*(F, C))$	tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$
A^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ A
J_r^A	toán tử giải của ánh xạ A với $J_r^A := (I + rA)^{-1}$
J^A	toán tử giải của ánh xạ A tương ứng với $r = 1$
$\limsup\limits_{k\to\infty} x_k$	giới hạn trên của dãy $\{x_k\}$
$\liminf\limits_{k\to\infty} x_k$	giới hạn dưới của dãy $\{x_k\}$
$x_k \to x_0$	$\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới x_0
$\mathrm{diam}(C)$	đường kính của tập C
$\mathcal{B}(C)$	tập các tập con bị chặn của C
$D_C(T_i, T_j)$	khoảng cách $D_C(T_i, T_j) = \sup\limits_{x \in C} \lVert T_i(x) - T_j(x) \rVert$

Danh sách bảng

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân với toán tử loại đơn điệu
- Mã số: ĐH2016-TN06-02
- Chủ nhiệm: ThS. Nguyễn Song Hà
- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
- Thời gian thực hiện: 08/2016 - 08/2018

2. Mục tiêu

- Xây dựng phương pháp lặp mới có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được. Đưa ra điều kiện và chứng minh sự hội tụ của phương pháp.
- Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị lồi.
- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu cho cán bộ giảng dạy Toán học giải tích và Toán học ứng dụng của Đại học; phục vụ hiệu quả cho công tác NCKH và đào tạo sau đại học chuyên ngành Toán giải tích và Toán ứng dụng của Đại học Thái Nguyên.
- Mở rộng hợp tác nghiên cứu khoa học với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học.

3. Tính mới, tính sáng tạo

- Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân. Các phương pháp mới có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được.
- Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa.
- Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị hàm lồi.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề xuất phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp để tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực. Đồng thời áp dụng phương pháp mới xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.
- Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho một lớp

bài toán bất đẳng thức biến phân trên không gian Banach thông qua đề xuất mới và sử dụng các ánh xạ $\tilde{S}_k, \hat{S}_k$ và S^k.

- Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa cho các thuật toán mới đề xuất và tương quan với một số phương pháp đã có.

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

- Có 05 bài báo đăng trên tạp chí Khoa học

(1) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "A new explicit iteration method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, 72, pp. 467-481.

(2) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "Hybrid steepest-descent method with a countably infinite family of nonexpansive mappings on Banach spaces", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 21, pp. 273-287.

(3) Buong Ng., Quynh. V. X., Thuy Ng. T. T. (2016), "A steepest-descent Krasnosel'skii–Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory and Appl.*, 18, pp. 519-532.

(4) Ha Ng. S., Buong Ng., Thuy Ng. T. T. (2017), "A new simple parallel iteration method for a class of variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, DOI 10.1007/s40306-017-0228-x.

(5) Tuyen T. M., Ha Ng. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.

5.2. Sản phẩm đào tạo

- Có 01 đề tài sinh viên NCKH đã nghiệm thu

(1) Nguyễn Quang Hưng (2016), "Một số phương pháp xấp xỉ tìm cực trị của hàm phi tuyến", *Đề tài sinh viên NCKH*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Có 01 KLTN Đại học đã nghiệm thu

(1) Hà Thị Thanh Hường (2017), "Tính không giãn của toán tử trong không gian Hilbert", *Khóa luận tốt nghiệp*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu

- Phục vụ công tác NCKH và đào tạo sau đại học tại Đại học Thái Nguyên.
- Tăng cường hợp tác nghiên cứu khoa học giữa các cán bộ thuộc các trường Đại học, các viện nghiên cứu (Viện Công nghệ thông tin và Viện Toán học).
- Tăng cường năng lực nghiên cứu cho nhóm thực hiện đề tài.

Thái Nguyên, ngày ... tháng 4 năm 2018

Xác nhận của tổ chức chủ trì	Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên, đóng dấu)	*(ký, họ tên)*
	Nguyễn Song Hà

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information

- Project title: Explicit iteration method for solving variational inequality with monotone operator type
- Code number: ĐH2016-TN06-02
- Coordinator: M.Sc. Nguyen Song Ha
- Implementing institution: TNU - University of Sciences
- Duration: From 08/2016 to 08/2018

2. Objectives

- To construct simple iterative methods which can be calculated in parallel; To introduce conditions and prove the convergence of these methods.
- To apply the approximate solution to the convex optimization problem.
- To enhance the research ability of those who teach Mathematical Analysis and Applied Mathematics, which is meaningful for conducting scientific research and teaching Mathematical Analysis and Applied Mathematics at postgraduate level at Thai Nguyen University.
- To expand scientific research cooperation with other research institutions.

3. Creativeness and innovativeness

- We have constructed new simple iterative methods for a class of variational inequality problem. Those new methods have simple formula and can be calculated in parallel.
- We have given some numerical examples for illustration.
- Those methods can be applied to approximate solution for convex optimization problem.

4. Research results

- We have proposed hybrid and shrinking projection methods to find a common fixed point of a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in real Hilbert spaces. We have also applied these new methods to approximate solution for system variational inequalities problem with the monotone operator.
- We have established some new explicit iterative methods to approximate solution for a class of variational inequality problem in Banach space based

on using mappings $\tilde{S}_k, \hat{S}_k$ and S^k.

- We have given some numerical examples for illustration and compared with some existing methods.

5. Products

5.1. Scientific publications

- There are 05 published papers:

(1) Buong, Ng., Ha, Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "A new explicit iteration method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, 72, pp. 467-481.

(2) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "Hybrid steepest-descent method with a countably infinite family of nonexpansive mappings on Banach spaces", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 21, pp. 273-287.

(3) Buong, Ng., Quynh. V. X., Thuy Ng. T. T. (2016), "A steepest-descent Krasnosel'skii–Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory and Appl.*, 18, pp. 519-532.

(4) Ha, Ng. S., Buong, Ng., Thuy Ng. T. T. (2017), "A new simple parallel iteration method for a class of variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, DOI 10.1007/s40306-017-0228-x.

(5) Tuyen, T. M., Ha, Ng. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.

5.2. Training results

- One student scientific research successfully defended

(1) Nguyen Quang Hung (2016), "Some approximate methods to find the extremes of the nonlinear function", *Student scientific research*, Thai Nguyen University of Sciences.

- One graduation thesis successfully defended

(1) Ha Thi Thanh Huong (2017), "The nonexpansiveness of operator in Hilbert space", *Under graduation thesis*, Thai Nguyen University of Sciences.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of the research results

- Being beneficial to the scientific research and postgraduate education and training at Thai Nguyen University.
- Strengthening scientific research cooperation among officials of universities and research institutes (Institute of Information Technology and Institute of Mathematics).
- Strengthening the research ability of the project team.

Mở đầu

0.1. Tính cấp thiết của đề tài

Cho H là không gian Hilbert thực và C là tập con lồi đóng khác rỗng của H. Cho $F : H \to H$ là ánh xạ xác định trên H. Mô hình bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển có dạng:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho:} \quad \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{0.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân (0.1) đã được đề xuất vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX, gắn liền với những nghiên cứu của Lions, Stampacchia và cộng sự (Lions và Stampacchia, 1965, 1967; Hartman và Stampacchia, 1966). Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự. Bài toán đã thu hút được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu bởi bài toán này bao hàm nhiều bài toán lí thuyết như: bài toán cực trị; bài toán điểm bất động; bài toán cân bằng; bài toán bù; phương trình với toán tử đơn điệu; bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng ... và nhiều bài toán thực tiễn như: bài toán khôi phục tín hiệu; bài toán phân phối băng thông; kiểm soát năng lượng trong hệ thống mạng CDMA và kĩ thuật xử lí tín hiệu băng tần ...

Để có thể ứng dụng bài toán bất đẳng thức biến phân vào thực tiễn, đòi hỏi phải có những phương pháp giải số hiệu quả cho bài toán này. Cho đến nay người ta đã thiết lập được nhiều kĩ thuật giải bất đẳng thức biến phân dựa trên phương pháp chiếu của Goldstein (1964), Polyak (1966, 1967, 1969), phương pháp điểm gần kề của Martinet (1970), Rokaffellar (1976), nguyên lý bài toán phụ của Cohen (1980), phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder-Tikhonov (Browder, 1966; Tikhonov, 1963), phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh của Lehdili và Moudafi (1996), Ryazantseva (2002) và phương pháp điểm gần kề quán tính do Alvarez và Attouch (2001) đề xuất hoặc dựa trên một số kĩ thuật tìm điểm bất động như phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann (Mann, 1953; Krasnosel'skii, 1955), phương pháp lặp Halpern (1967) và phương pháp xấp xỉ mềm (Moudafi, 2000).

Mặt khác, nhiều bài toán thuộc lĩnh vực công nghệ truyền thông hiện đại đã đề cập ở trên có thể quy về mô hình bài toán (0.1) với C được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn T_i $(i \in \mathcal{I})$, ở đây $\mathcal{I}$ là tập chỉ số nào đó. Năm 2001, Yamada đã xây dựng phương pháp lai ghép đường dốc nhất mà phương pháp này hội tụ mạnh về một thành phần nằm trong tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn đồng thời thỏa mãn là nghiệm của bài toán (0.1). Từ đó đến nay, đã có nhiều công trình nghiên cứu nhằm mở rộng hoặc cải tiến phương pháp của Yamada theo nhiều hướng khác nhau. Chẳng hạn, theo hướng làm giảm nhẹ điều kiện đặt lên dãy tham số lặp (Xu và đtg, 2003; Zeng và đtg, 2007; Nguyễn Bường và đtg, 2011) hoặc mở rộng cho bài toán trong những trường hợp phức tạp hơn, chẳng hạn như khi C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn (Iemoto và đtg 2008; Yao và đtg, 2010; Wang, 2011) hoặc nghiên cứu mở rộng từ không gian Hilbert H tới lớp không gian Banach E (Ceng và đtg, 2008; Chidume và đtg, 2011; Nguyễn Bường và đtg, 2013, 2015) ...

Có thể khẳng định rằng, bài toán bất đẳng thức biến phân đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều con đường tiếp cận khác nhau nhằm xây dựng các phương pháp giải hữu hiệu để có thể ứng dụng trong thực tiễn. Vì những lí do đã phân tích ở trên, chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu là **"Phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân với toán tử loại đơn điệu"**.

0.2. Mục tiêu của đề tài

1. Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán nghiên cứu có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được. Đưa ra điều kiện và chứng minh sự hội tụ của các phương pháp.

2. Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa và tương quan với một số phương pháp đã có.

3. Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị lồi.

0.3. Nội dung nghiên cứu của đề tài

Báo cáo tổng kết đề tài gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 giới thiệu sơ lược về một số vấn đề liên quan đến cấu trúc hình học của các không gian Banach, lớp bài toán nghiên cứu, một số mệnh đề và bổ đề cần sử dụng cho việc chứng minh các kết quả nghiên cứu đạt được.

Chương 2 trình bày các kết quả nghiên cứu mới của chúng tôi về các vấn đề nêu trên. Chúng tôi giới thiệu và chứng minh chi tiết sự hội tụ mạnh của các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán nghiên cứu. Bên cạnh đó, trình bày các ví dụ số cụ thể minh họa và ứng dụng cho bài cực trị của hàm lồi.

Chương 1

Phương pháp lai ghép đường dốc nhất, chiếu lai ghép và chiếu co hẹp

1.1. Không gian Banach và giới hạn Banach

1.2. Ánh xạ liên tục Lipschitz và ánh xạ j-đơn điệu

1.3. Một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân

1.3.1 Mô hình bài toán

Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Giả sử $\{T_i\}$ là họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Lớp bài toán bất đẳng thức biến phân, kí hiệu là VIP$^*(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho:} \quad \langle F(x_*), j(x - x_*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{1.2}$$

trong đó j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E.

1.3.2 Phương pháp lai ghép đường dốc nhất

Nghiên cứu mở rộng cho trường hợp C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn, bằng việc sử dụng ánh xạ W_k, năm 2008, Iemoto và Takahashi đã xây dựng dãy lặp hiện $\{x_k\}$ có dạng

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k \rho F)W_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.9}$$

ở đây x_1 là điểm tùy ý thuộc H, $\lambda_k \in (0, 1]$ và $\rho > 0$ là các tham số lặp.

Định lí 1.3. *Cho $F : H \to H$ là ánh xạ liên tục L-Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên H với $C :=$*

$\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(\mathrm{T_i}) \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{\alpha_k\}$ *là dãy các số thực thỏa mãn* $0 < a \leq \alpha_k \leq b < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *với* $a, b \in (0, 1)$. *Khi đó, nếu các điều kiện sau bảo đảm*

i) $\rho \in (0, 2\eta/L^2)$,

ii) λ_k *thỏa mãn các điều kiện* (L1) *và* (L2)

thì dãy lặp (1.9) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* (0.1). Các tác giả đã loại bỏ được điều kiện (L3) hoặc (L3)*. Tuy vậy, ánh xạ W_k có cấu trúc phức tạp và phương pháp (1.9) không tính toán song song được. Năm 2010, Yao và các cộng sự đã thiết lập một lược đồ lặp cải biên có dạng

$$x_{k+1} = (1-\gamma_k)(I-\lambda_k F)(x_k) + \gamma_k W_k((I-\lambda_k F)(x_k)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad (1.10)$$

trong đó x_1 là điểm tùy ý thuộc H, $\gamma_k \in [0, 1]$ và $\lambda_k \geq 0$ là các tham số lặp.

Định lí 1.4. *Cho* $F : H \to H$ *là ánh xạ liên tục* L*-Lipschitz và* η*-đơn điệu mạnh trên* H. *Cho* $\{T_i\}$ *là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên* H *với* $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{\alpha_k\}$ *là dãy các số thực thỏa mãn* $0 < \alpha_k \leq b < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *Khi đó, nếu các điều kiện sau bảo đảm*

i) $\gamma_k \in [\gamma, 1/2]$ *với* $\gamma > 0$,

ii) λ_k *thỏa mãn các điều kiện* (L1) *và* (L2)

thì dãy lặp (1.10) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* (0.1). Giống như phương pháp (1.9), ta thấy rằng phương pháp (1.10) cũng có cấu trúc phức tạp và không tính toán song song được. Một năm sau, Wang cũng đã nhận được kết quả tương tự như của Yao và cộng sự. Tuy nhiên, điều kiện thêm vào $\lambda_k F(x_k) \to 0$ khi $k \to \infty$ đảm bảo sự hội tụ lại là một hạn chế của phương pháp. Bởi với điều kiện này việc tính toán và kiểm tra trên máy tính là khó thực hiện.

Nghiên cứu mở rộng từ không gian Hilbert H tới lớp các không gian Banach E, năm 2008, Ceng và cộng sự đã cải biên phương pháp lai ghép đường dốc nhất của Yamada. Các tác giả đã xây dựng dãy lặp ẩn xấp xỉ nghiệm cho bài toán (1.2) có dạng:

$$x_k = \alpha_k(I - \lambda_k\beta_k F)T(x_{k-1}) + (1-\alpha_k)T(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \quad (1.11)$$

và

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k \beta_k F)T(\alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T(y_k)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.12}$$

trong đó λ_k, β_k và α_k là các dãy số thực thuộc $[0, 1)$. Tuy nhiên, việc xây dựng các kĩ thuật lặp ẩn cho bài toán (1.2), một khó khăn có thể gặp phải của các phương pháp đó là trong thực hành tính toán tại mỗi bước lặp, ta đều phải thực hiện các bước giải một phương trình dạng ẩn để tìm nghiệm xấp xỉ và sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được nghiệm xấp xỉ gần với nghiệm chính xác của bài toán. Để khắc phục khó khăn này, năm 2016, chúng tôi thiết lập phương pháp lặp dạng hiện mới kiểu Krasnosel'skii-Mann đường dốc nhất như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)(\alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T(x_k)), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.13}$$

Sự hội tụ mạnh của phương pháp được phát biểu trong định lí sau đây.

Định lí 1.5. *Cho E là không gian Banach trơn đều (hoặc không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều). Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho T là ánh xạ không giãn trên E với $C := \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện* (L1), (L2) *và $\alpha_k \in [a, b] \subset (0, 1)$. Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (1.13) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

Khi C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Banach thực E, thay cho việc sử dụng ánh xạ phức tạp W_k, ta có thể sử dụng các ánh xạ V_k hoặc S_k có cấu trúc đơn giản hơn do Nguyễn Bường và các cộng sự đề xuất lần lượt vào các năm 2013 và 2015. Nổi bật trong đó là hai phương pháp lặp hiện sử dụng ánh xạ S_k có thể tính toán song song được.

1.4. Phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp

Định lí 1.8. *Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H với $\mathrm{diam}(C) < \infty$. Cho $\mathcal{T}_i = \{T_{i,k}\}$ là dãy các ánh xạ gần không giãn từ C vào H tương ứng với dãy $\{a_{i,k}\}$ sao cho $S = \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(\mathcal{T}_i) \neq \emptyset$. Cho*

$T_i : C \to H$ *xác định bởi* $T_i(x) = \lim_{k\to\infty} T_{i,k}(x)$ *với mọi* $x \in C$. *Giả sử rằng* $\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}_C(T_{i,k}, T_i) = 0$ *và* $\bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) = \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(\mathcal{T}_i)$. *Với điểm ban đầu tùy ý* $x_0 \in C$, *xét dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *xác định bởi:*

$$\begin{cases} y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T_{i,k}(x_k), \ \ i = 1, 2, ..., N, \\ C_k^i = \{z \in C: \ \|y_k^i - z\|^2 \le \|x_k - z\|^2 + (2\mathrm{diam}(C) + a_{i,k})a_{i,k}\}, \\ C_k = \bigcap_{i=1}^{N} C_k^i, \\ Q_k = \{z \in C: \ \langle x_k - z, x_0 - x_k\rangle \ge 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k\cap Q_k}(x_0), \ \ k \ge 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

hoặc

$$\begin{cases} y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T_{i,k}(x_k), \ \ i = 1, 2, ..., N, \\ \textit{Chọn } i_k \in \operatorname*{argmax}_{i=1,2,...,N}\{\|y_k^i - x_k\|\}, \\ \overline{y}_k = y_k^{i_k}, \\ C_k = \{z \in C: \|\overline{y}_k - z\|^2 \le \|x_k - z\|^2 + (2\mathrm{diam}(C) + a_{i_k,k})a_{i_k,k}\}, \\ Q_k = \{z \in C: \langle x_k - z, x_0 - x_k\rangle \ge 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k\cap Q_k}(x_0), \ \ k \ge 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

trong đó $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$. *Khi đó, dãy* $\{x_k\}$ *hội tụ mạnh tới* $P_S(x_0)$.

Định lí 1.9. *Cho* C, $\mathcal{T}_i = \{T_{i,k}\}$, T_i *với* $i = 1, 2, ..., N$ *được giả thiết tương tự như trong Định lí 1.8. Với điểm ban đầu tùy ý* $x_0 \in C$, *xét dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *xác định bởi:*

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T_{i,k}(x_k), \ \ i = 1, 2, ..., N, \\ C_k^i = \{z \in C_k: \ \|y_k^i - z\|^2 \le \|x_k - z\|^2 + (2\mathrm{diam}(C) + a_{i,k})a_{i,k}\}, \\ C_{k+1} = \bigcap_{i=1}^{N} C_k^i, \\ x_{k+1} = P_{C_{k+1}}(x_0), \ \ k \ge 0, \end{cases} \tag{1.28}$$

hoặc

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k) T_{i,k}(x_k),\ i = 1,2,...,N, \\ \textit{Chọn } i_k \in \underset{i=1,2,...,N}{\operatorname{argmax}} \{\|y_k^i - x_k\|\}, \\ \overline{y}_k = y_k^{i_k}, \\ C_{k+1} = \{z \in C_k :\ \|\overline{y}_k - z\|^2 \le \|x_k - z\|^2 + (2\operatorname{diam}(C) + a_{i_k,k}) a_{i_k,k}\}, \\ x_{k+1} = P_{C_{k+1}}(x_0),\ k \ge 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

trong đó $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$. *Khi đó, dãy* $\{x_k\}$ *hội tụ mạnh tới* $P_S(x_0)$.

Áp dụng các kết quả mới của chúng tôi cho bài toán xác định không điểm chung của họ hữu hạn các toán tử A_i mà không cần giả thiết $\operatorname{diam}(C) < \infty$. Định lí sau là hệ quả trực tiếp của các Định lí 1.8 và Định lí 1.9.

Định lí 1.10. *Cho* $\{r_{i,k}\}$, $i = 1,2,...,N$ *là dãy các số thực dương sao cho*

$$\min_{i=1,2,...,N} \{\inf_k \{r_{i,k}\}\} = r > 0.$$

Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, *xét dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *xác định bởi* (1.26)-(1.27) *hoặc* (1.28)-(1.29), *với* $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$ *và* $T_{i,k} = J_{r_{i,k}}^{A_i}$. *Khi đó, dãy* $\{x_k\}$ *hội tụ mạnh tới* $P_S(x_0)$.

Từ Định lí 1.10 ta nhận được kết quả dưới đây.

Định lí 1.11. *Cho* C_i, $i = 1,2,...,N$ *là các tập con lồi đóng của không gian Hilbert thực* H. *Cho* $A_i : C_i \to H$ *là các toán tử đơn điệu và h-liên tục,* $i = 1,2,...,N$ *với* $S = \bigcap_{i=1}^{N} Sol(\mathrm{VIP}(A_i, C_i)) \neq \emptyset$. *Với điểm ban đầu tùy ý* $x_0 \in C$, *xét dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *xác định bởi* (1.26)-(1.27) *hoặc* (1.28)-(1.29), *với* $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$, $T_{i,k}(x_k) = Sol(\mathrm{VI}(\gamma_{i,n} A_i + I - x_k), C_i)$ *và* $\min_{i=1,2,...,N} \{\inf_k \{\gamma_{i,k}\}\} = r > 0$. *Khi đó, dãy* $\{x_k\}$ *hội tụ mạnh tới* $P_S(x_0)$.

Chương 2

Các phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm cho bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$

2.1. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ $\tilde{S}_k$

2.1.1 Nội dung phương pháp

Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, chúng tôi xây dựng dãy $\{x_k\}$ theo lược đồ lặp hiện như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{2.1}$$

trong đó $\tilde{S}_k$ được xác định bởi

$$\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{\tilde{s}_k} T^i \tag{2.2}$$

với

$$T^i = (1 - \alpha_i)I + \alpha_i T_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \tag{2.3}$$

ở đây $\alpha_i \in (0, 1)$, T_i là các ánh xạ không giãn và I là ánh xạ đơn vị trên E. Các dãy tham số $\lambda_k \in (0, 1)$ và $\{s_i\}$ tương ứng thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và

$$s_i > 0, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i = \tilde{s} < \infty. \tag{2.4}$$

2.1.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Định lí 2.1. *Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0, 1)$ và s_i tương ứng thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và (2.4). Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (2.1) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán (1.2) khi $k \to \infty$.*

2.2. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ $\hat{S}_k$

2.2.1 Nội dung phương pháp

Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, chúng tôi xây dựng dãy lặp hiện $\{x_k\}$ như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.10}$$

ở đây ánh xạ $\hat{S}_k$ xác định bởi

$$\hat{S}_k = \frac{1}{s_0 - s_k} \sum_{i=1}^{k} (s_{i-1} - s_i) T^i \tag{2.11}$$

trong đó T^i được xác định bởi (2.3), $\lambda_k \in (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và $\{s_i\}$ là dãy các số thực giảm ngặt, hội tụ về 0 khi $i \to \infty$.

2.2.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Định lí 2.2. *Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện* (L1), (L2) *và $\{s_i\}$ là dãy số thực dương giảm ngặt, hội tụ về* 0. *Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (2.10) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

2.3. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ S^k

2.3.1 Nội dung phương pháp

Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, dãy lặp hiện $\{x_k\}$ được thiết kế như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)S^k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.16}$$

trong đó $S^k = \alpha I + (1 - \alpha)T^k$ với $T^k = \sum_{i=1}^{k} (s_i/\tilde{s}_k)T_i$ và $\alpha \in (0, 1)$ là một số thực cố định, s_i được xác định bởi (2.4), $\tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$ và λ_k thỏa mãn các điều kiện (L1) và (L2).

2.3.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Định lí 2.3. *Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Lấy một giá trị cố định $\alpha \in (0, 1)$. Giả sử λ_k và s_i tương ứng thỏa mãn các điều kiện* (L1), (L2) *và* (2.4)*. Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (2.16) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

2.4. Ứng dụng và kết quả tính toán số

Các phương pháp lặp dạng hiện mới của chúng tôi có thể áp dụng để tìm nghiệm của bài toán cực trị:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho}: \quad \varphi(x_*) = \min_{x \in C} \varphi(x), \quad C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i, \tag{2.22}$$

trong đó φ là phiếm hàm lồi, có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục Lipschitz, đơn điệu mạnh trên không gian $\mathbb{R}^n$ và C_i là các tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^n$ được cho bởi

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i x_n \leq b_i\}, \tag{2.23}$$

hoặc

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^i)^2 \leq r_i^2\}, \quad r_i > 0, \tag{2.24}$$

ở đây $a_j^i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq j \leq n)$.

Ví dụ 2.1. Xét bài toán (2.22)-(2.23) trong trường hợp $n = 2$. Hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có dạng $\varphi(x) := \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ với $x = (x_1, x_2)$. Các tập C_i được cho bởi

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \leq b_i\}$$

với $a_1^i = 1/i, a_2^i = -1$ và $b_i = 0$ với mọi $i \geq 1$. Trong trường hợp này, dễ thấy $x_* = (0; 0)$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Chọn điểm ban đầu $x_1 = (2.0; -3.0)$ và các dãy tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 2.1 là

$$\lambda_k = 1/(k+2), \quad s_i = \alpha_i = 1/i(i+1).$$

Sau 100 bước lặp ta nhận được bảng kết quả:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	...	...	...
...	...	...	100	-0.000100272	-0.000040995

Bảng 2.1: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.1)

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp (1.9) của Iemoto và cộng sự cho cùng bài toán trên. Ta chọn các tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.3 là

$$\lambda_k = 1/(k+2), \quad \alpha_i = 1/100 + 1/i(i+1) \quad \text{và} \quad \rho = 1/20.$$

Kết quả tính toán đối với phương pháp (1.9) với cùng điểm ban đầu và số bước lặp:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	...	...	...
...	...	...	100	-0.335041279	-0.149090066

Bảng 2.2: Kết quả tính toán cho phương pháp (1.9) với $\rho = 1/20$

Bây giờ, sử dụng phương pháp (1.10) của Yao và cộng sự. Các tham số được chọn thỏa mãn Định lí 1.4 là

$$\lambda_k = 1/(k+2), \quad \alpha_i = 1/100 + 1/i(i+1) \quad \text{và} \quad \gamma_k = 1/100.$$

Kết quả tính toán cho phương pháp (1.10) với cùng điểm ban đầu và số bước lặp được cho trong bảng sau đây:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	...	...	...
...	...	...	100	0.000210945	-0.000385873

Bảng 2.3: Kết quả tính toán cho phương pháp (1.10) với $\gamma_k = 1/100$

Trong ví dụ này, phương pháp (2.1) của chúng tôi đề xuất có tốc độ hội tụ nhanh hơn và cần ít thời gian tính toán hơn các phương pháp (1.9) và phương pháp (1.10).

Ví dụ 2.2. Xét bài toán (2.22)-(2.24) trong trường hợp $n = 2$. Hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\varphi(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$ với $x = (x_1, x_2)$. Các tập C_i được cho bởi $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1^i)^2 + (x_2 - a_2^i)^2 \leq r_i^2\}$ với $r_i = 1$, $a_1^i = 1 + 1/i$ và $a_2^i = 0$ với mọi $i \geq 1$. Trong trường hợp này $x_* = (1.5; \sqrt{0.75})$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Áp dụng phương pháp (2.1) với $F(x) = \nabla\varphi(x)$ và $T_i = P_{C_i}$. Chọn điểm ban đầu là $x_1 = (3.0; 3.0)$ và dãy các tham số tương tự như trong Ví dụ 3.1. Áp dụng phương pháp (2.1), kết quả tính toán ở bước lặp 46000 ta nhận được nghiệm xấp xỉ là $(1.54118986; 0.88877202)$. Trong khi đó, cùng bước lặp như trên, nếu áp dụng phương pháp (1.9) với $\rho = 1/3$ thì nghiệm xấp xỉ là $(1.552771131; 0.894458825)$, nếu sử dụng phương pháp (1.10) với $\gamma_k = 1/100$ thì ta nhận được nghiệm xấp xỉ là $(1.548117716; 0.903764265)$.

Trong ví dụ này, chúng ta cũng thấy phương pháp (2.1) có tốc độ hội tụ nhanh hơn và cần ít thời gian tính toán hơn các phương pháp (1.9) và (1.10).

Ví dụ 2.3. Ta xét bài toán (2.22)-(2.23) trong trường hợp $n = 2$. Hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi $\varphi(x) = x^T A x + b^T x + c$ với $x = (x_1, x_2)$, trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ và } c = 13.$$

Các tập C_i được cho bởi $C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \geq b_i\}$ với $a_1^i = 1$, $a_2^i = i$ và $b_i = 2$ với mọi $i \geq 1$. Trong trường hợp này $x_* = (2.0; 3.0)$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Áp dụng phương pháp (2.10) cho ví dụ này với $F(x) = \nabla\varphi(x)$ và $T_i = P_{C_i}$. Chọn điểm ban đầu $x_1 = (-3.0; -3.0)$ và dãy các tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 2.4 là $\lambda_k = 1/k + 2$, $s_i = 1/(i+1)(i+2)$ với $i \geq 0$, $\alpha_i = 1/i(i+1)$ với $i \geq 1$. Sau 1000 vòng lặp ta có bảng kết quả tính toán:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	-3.00000000	-3.000000000	...	...	...
...	...	...	1000	1.999975551	2.999969617

Bảng 2.4: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.10)

Nếu sử dụng phương pháp (1.9) với cùng điểm xuất phát và chọn các tham số lặp thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.3 là $\lambda_k = 1/(k+2), \alpha_i =$

$1/100 + 1/i(i+1)$ và $\rho = 1/20$ thì kết quả tính toán đối với phương pháp này ở bước lặp thứ 1000 là $x_{1000} = (-0.003777417; 0.004757678)$. Nghiệm này còn sai số rất lớn so với nghiệm chính xác của bài toán. Nếu sử dụng (1.10) với cùng điểm xuất phát và chọn các tham số lặp thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.4 là $\lambda_k = 1/(k+2), \alpha_i = 1/100 + 1/i(i+1)$ và $\gamma_k = 1/2$ thì kết quả ở cùng số bước lặp là $x_{1000} = (1.999988011; 2.999986013)$. Nếu sử dụng phương pháp (2.1) với cùng điểm xuất phát và các tham số lặp được chọn tương tự như phương pháp (2.10) thì kết quả ở cùng số bước lặp là $x_{1000} = (1.999993006; 2.999991008)$.

Trong ví dụ này, ta cũng thấy tốc độ hội tụ và thời gian tính toán của phương pháp (2.1) và (2.10) nhanh hơn các phương pháp (1.9) và (1.10).

Ví dụ 2.4. Sử dụng phương pháp (2.16) của chúng tôi cho bài toán (2.22)-(2.23) với các giả thiết tương tự như trong Ví dụ 3.1. Với cùng điểm ban đầu $x_1 = (2.0; -3.0)$, chọn $\alpha = 0.5$ và giá trị của các tham số lặp khác được chọn giống như phương pháp (2.1) ở Ví dụ 3.1 là $\lambda_k = 1/(k+2)$ và $s_i = 1/i(i+1)$ thì sau 100 bước lặp ta có

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	...	...	...
...	...	...	100	-0.000078416	-0.000004588

Bảng 2.5: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.16)

Tiếp theo, sử dụng phương pháp (2.16) đối với bài toán (2.22)-(2.24) với các giả thiết tương tự như trong Ví dụ 3.2. Với cùng điểm ban đầu $x_1 = (3.0; 3.0)$, chọn $\alpha = 0.5$ và giá trị của các tham số lặp khác được chọn giống như ở trên. Khi ấy, tại bước lặp 45000 nghiệm xấp xỉ của bài toán là $(1.5034141156; 0.8682249753)$.

Chúng ta có thể thấy phương pháp (2.16) có tốc độ hội tụ nhanh hơn phương pháp (2.1) và tốn ít thời gian tính toán hơn phương pháp (2.1) trong ví dụ này. Đồng thời, nó thể hiện tính vượt trội hơn các phương pháp khác đã được trình bày ở trên.

KẾT LUẬN VÀ ĐỀ NGHỊ

Đề tài đã nghiên cứu và đề xuất các phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân.

Đề tài của chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:

- Đề xuất được hai phương pháp chiếu lai ghép là phương pháp (1.26), (1.27) và hai phương pháp chiếu co hẹp (1.28) và (1.29) để tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực. Đồng thời áp dụng phương pháp mới xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.
- Đề xuất được bốn phương pháp lặp dạng hiện mới là phương pháp (1.13), phương pháp (2.1), phương pháp (2.10) và phương pháp (2.16) để xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân trên không gian Banach với toán tử j-đơn điệu.
- Các phương pháp mới của chúng tôi có thể áp dụng cho bài toán tìm điểm bất động chung của họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn hoặc tìm không điểm chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ j-đơn điệu cực đại.
- Xây dựng được bốn ví dụ số đơn giản minh họa cho các thuật toán mới đề xuất và có tương quan với một số phương pháp (Ví dụ 2.1-Ví dụ 2.4).

Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo của đề tài:

(I) Nghiên cứu các tiêu chuẩn dừng của các phương pháp lặp đã đề xuất từ đó có thêm cơ sở để so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp đã đề xuất so với các kết quả của một số tác giả khác.

(II) Nghiên cứu giải bài toán bất đẳng thức biến phân nhiều bậc.

Kiến nghị khác:

Tiếp tục nhận được hỗ trợ từ các cấp, ngành, đơn vị về nhân lực và vật lực để tiếp tục thực hiện hướng nghiên cứu mới của đề tài và để có thể ứng dụng các kết quả nghiên cứu hiệu quả giải quyết các bài toán có ý nghĩa thực tiễn.