

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ**

**XẤP XỈ KHÔNG ĐIỂM CHUNG
CỦA HAI TOÁN TỬ KIỂU ĐƠN ĐIỀU
VÀ ỨNG DỤNG**

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2018

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN**

**BÁO CÁO TÓM TẮT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP BỘ**

**XẤP XỈ KHÔNG ĐIỂM CHUNG
CỦA HAI TOÁN TỬ KIỂU ĐƠN ĐIỀU
VÀ ỨNG DỤNG**

Mã số: B2016-TNA-26

Xác nhận của tổ chức chủ trì
(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên)

Trương Minh Tuyên

Thái Nguyên – 2018

Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài và đơn vị phối hợp chính

1. Danh sách các thành viên tham gia nghiên cứu đề tài

TT	Họ và tên	Đơn vị công tác và lĩnh vực chuyên môn	Nội dung nghiên cứu cụ thể được giao
1	ThS. Nguyễn Thanh Mai	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu tính ổn định của các phương pháp lặp
2	ThS. Nguyễn Thanh Hường	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp lặp luân phiên và điểm gần kề kết hợp với phương pháp lặp Halpern cho bài toán xác định không điểm chung của họ toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Banach
3	ThS. Bùi Việt Hương	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh phân rã.
4	ThS. Nguyễn Song Hà	Khoa Toán-Tin, Trường ĐHKH, ĐHTN; Toán Giải tích	Nghiên cứu phương pháp lai ghép cho bài toán tìm nghiệm của bất đẳng thức biến phân trên tập điểm của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn.

2. Đơn vị phối hợp chính

Tên đơn vị trong và ngoài nước	Nội dung phối hợp nghiên cứu	Họ và tên người đại diện đơn vị
Viện CNTT, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam	Tư vấn, định hướng nghiên cứu	GS. TS. Nguyễn Bường

Mục lục

Một số ký hiệu và viết tắt	vi
Mở đầu	1
Chương 1. Kiến thức chuẩn bị	3
1.1. Một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach	3
1.2. Một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu . .	3
1.2.1. Phương pháp điểm gần kề	3
1.2.2. Phương pháp lặp kiểu Halpern	3
1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm	3
1.3. Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh . .	3
1.3.1. Khoảng cách Bregman và phép chiếu Bregman	3
1.3.2. Ánh xạ Bregman không giãn mạnh	3
1.4. Một số bổ đề bổ trợ	3
Chương 2. Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j-đơn điệu	4
2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép	4
2.2. Phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu	5
2.2.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ	5
2.2.2. Tính ổn định của phương pháp	6
2.3. Phương pháp prox-Tikhonov xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu	7
2.3.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ	7
2.3.2. Tính ổn định của phương pháp	9
2.4. Xấp xỉ điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn	9
Chương 3. Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach	11
3.1. Sự hội tụ của phương pháp lặp song song	11
3.2. Ứng dụng	12
3.2.1. Bài toán điểm cực tiểu tách	12
3.2.2. Bài toán chấp nhận tách	12
Chương 4. Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh	13
4.1. Phương pháp lặp song song	13
4.2. Ứng dụng	13
4.2.1. Bài toán chấp nhận lỗi	13
4.2.2. Không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại . . .	14

4.2.3.	Bài toán cân bằng	14
4.2.4.	Không điểm chung của các toán tử Bregman ngược đơn điều mạnh	14
4.2.5.	Bất đẳng thức biến phân	14
4.3.	Hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát	15
Kết luận		16

Một số ký hiệu và viết tắt

E	không gian Banach
E^*	không gian đối ngẫu của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}^+$	tập các số thực không âm
$\inf M$	cận dưới đúng của tập hợp số M
$\sup M$	cận trên đúng của tập hợp số M
$\operatorname{argmin}_{x \in X} F(x)$	tập các điểm cực tiểu của hàm F trên X
$D(A)$	miền xác định của toán tử A
$R(A)$	miền ảnh của toán tử A
I	toán tử đồng nhất
$d(x, M)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp M
$\mathcal{H}(C_1, C_2)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp C_1 và C_2
$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$	giới hạn trên của dãy số $\{x_n\}$
$x_n \longrightarrow x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về x_0
$x_n \rightharpoonup x_0$	dãy $\{x_n\}$ hội tụ yếu về x_0
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
$\delta_E(\varepsilon)$	mô đun lỗi của không gian Banach E
$\rho_E(\tau)$	mô đun trơn của không gian Banach E
$\operatorname{Fix}(T)$ hoặc $F(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
∂f	dưới vi phân của hàm lồi f
$\overline{M}$	bao đóng của tập hợp M
$o(t)$	vô cùng bé bậc cao hơn t
TOL	sai số của nghiệm xấp xỉ so với nghiệm chính xác
$\operatorname{int}(C)$	phần trong của tập hợp C

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

Tên đề tài: Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và ứng dụng

Mã số: B2016-TNA-26

Chủ nhiệm đề tài: TS. Trương Minh Tuyên

Email: tuyentm@tnus.edu.vn

Điện thoại: 0982890409

Cơ quan chủ trì: Đại học Thái Nguyên

Thời gian thực hiện: 2016-2017

2. Mục tiêu

- Đề xuất các phương pháp xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và mở rộng cho trường hợp hữu hạn toán tử dựa trên sự cải tiến phương pháp lặp của H. H. Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich [2];
- Đề xuất các phương pháp xấp xỉ nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của các ánh xạ không giãn hay tập không điểm chung của các toán tử kiểu đơn điệu.

3. Tính mới và tính sáng tạo

Đề tài đã nghiên cứu và đưa ra các phương pháp lặp mới cho bài toán tìm không điểm chung của hai (hữu hạn) toán tử kiểu đơn điệu, bài toán không điểm chung tách và bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach cùng với một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các lớp bài toán khác.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề tài đã nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp luận phiên với phương pháp xấp xỉ gắn kết và phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach (02 bài báo khoa học);
- Đề tài đã nghiên cứu phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach (01 bài báo khoa học);
- Đề tài đã nghiên cứu phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ (02 bài báo khoa học).

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

1. Tuyen T.M. (2017), “A strong convergence theorem for the split common null point problem in Banach spaces”, *Appl. Math. Optim.*, doi.org/10.1007/s00245-017-9427-z. (SCI)
2. T.M. Tuyen (2017), “On the strong convergence theorem of the hybrid viscosity approximation method for zeros of m -accretive operators in Banach spaces”, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), pp. 287–299. (Scopus)
3. Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), “Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces”, *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4. (SCIE)
4. Tuyen T.M. (2017), “Parallel iterative methods for Bregman strongly non-

expansive operators in reflexive Banach spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3), 1695–1710 (SCIE)

5. Tuyen T.M. (2017), "Parallel iterative methods for solving systems of generalized mixed equilibrium problems in reflexive Banach spaces", *Optimization*, 66(4), pp. 623–639 (SCIE)

5.2. Sản phẩm đào tạo

- Hướng dẫn 05 luận văn cao học:

1. Nguyễn Thị Hồng Phương (2016), *Phương pháp xấp xỉ gần kết lai ghép cho bài toán xác định không điểm của toán tử j -đơn điệu*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

2. Nguyễn Văn Quân (2016), *Phương pháp điểm gần kề quán tính xác định không điểm của toán tử đơn điệu và ngược đơn điệu mạnh trong không gian Hilbert*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

3. Nguyễn Thị Thu Thủy (2016), *Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và phương pháp điểm gần kề quán tính hiệu chỉnh cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn trong không gian Banach*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

4. Nguyễn Thiên Quang (2017), *Một số phương pháp lai tìm điểm bất động chung của một họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

5. Hoàng Thị Thương (2017), *Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Hướng dẫn 01 đề tài sinh viên nghiên cứu khoa học:

1. Trần Thị Thanh Loan (2016), *Bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ không giãn*, trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại

- Về khoa học: Công bố được một số kết quả mới, có ý nghĩa khoa học trên các tạp chí quốc tế có uy tín ISI (thuộc chủ đề nghiên cứu của đề tài).

- Về giáo dục và đào tạo: Hướng dẫn thạc sĩ, hỗ trợ luận án tiến sĩ của một thành viên đề tài, phục vụ hiệu quả cho công tác giảng dạy sau đại học các chuyên ngành về Toán tại Đại học Khoa học–Đại học Thái Nguyên.

- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu các thành viên trong nhóm thực hiện đề tài, mở rộng hợp tác nghiên cứu.

Tổ chức chủ trì
(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên)

Trương Minh Tuyên

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General Information

Project title: Approximate a common zero for two monotone type operators and applications

Code number: B2016-TNA-26

Coordinator: Dr. Truong Minh Tuyen

Email: tuyentm@tnus.edu.vn

Phone: 0982890409

Implementing institution: Thai Nguyen University

Duration: From 1/2016 to 12/2017

2. Objectives

- Study the approximation methods to find the common zero of two monotone type operators and extend this methods for the problem of finding a common zero of a finite family of monotone operators base on the modification of iterative method of H. H. Bauschke, P. L. Combettes and S. Reich in [11];
- Study the solution approximation methods of the variational inequalities over the set of common fixed points of nonexpansive mappings or the set of common zeros of monotones type operators.

3. Novelty and creativity

The project studied and gave some new iterative methods for solving the problem of finding a common zero of two (finite) monotone type operators, the split common null point problem, and the problem of finding a common fixed point of a finite family of Bregman strongly nonexpansive operators in Banach spaces and some applications of obtained results for some problems related.

4. Research results

- The project studied the combination alternating iterative method with the viscosity approximation method and prox-Tikhonov method for solving the problem of finding a common zero of two accretive operators in Banach spaces (02 papers);
- The project studied two parallel iterative methods for solving the split common null point problem in Banach spaces (01 paper);
- The project studied two parallel iterative methods for solving the problem of finding a common fixed point of a finite family of Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces (02 papers).

5. Products

5.1. Scientific publications

1. Tuyen T.M. (2017), "A strong convergence theorem for the split common null point problem in Banach spaces", *Appl. Math. Optim.*, doi.org/10.1007/s00245-017-9427-z. (SCI)
2. T.M. Tuyen (2017), "On the strong convergence theorem of the hybrid viscosity approximation method for zeros of m-accretive operators in Banach spaces", *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 22(2), pp. 287–299. (Scopus)
3. Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4. (SCIE)
4. Tuyen T.M. (2017), "Parallel iterative methods for Bregman strongly non-expansive operators in reflexive Banach spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.*, 19(3), 1695–1710 (SCIE)
5. Tuyen T.M. (2017), "Parallel iterative methods for solving systems of general-

ized mixed equilibrium problems in reflexive Banach spaces", *Optimization*, 66 (4), pp. 623–639 (SCIE)

5.2. Training results: 05 master of theses

1. Nguyen Thi Hong Phuong (2016), *Hybrid viscosity approximation method for the problem of finding zero of accretive operators*, Thai Nguyen University of Sciences.
2. Nguyen Van Quan (2016), *Inertial proximal point method for zeros of monotone operators and inverse strongly monotone operators in Hilbert spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.
3. Nguyen Thi Thu Thuy (2016), *Tikhonov regularization method and regularization inertial proximal point method for the problem of finding common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings in Banach spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.
4. Nguyen Thien Quang (2017), *Hybrid methods for finding a common fixed point of a family of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.
5. Hoang Thi Thuong (2017), *Approximate a common zero of two accretive operators in Banach spaces*, Thai Nguyen University of Sciences.

01 scientific research students

1. Tran Thi Thanh Loan (2016), *Variational inequalities over the set of common fixed points of finite family of nonexpansive mappings*, Thai Nguyen University of Sciences.

6. Applications and effectiveness

- On the scientific aspect: Publishing some scientific results in ISI journals of mathematics (in the research topic of the project).
- On educational aspect: Instructing 5 master theses, supporting a PhD thesis, teaching undergraduate students and graduate students in mathematics at Thai Nguyen University of Sciences.
- Strengthening the research capacity for the investigators of the projects, deepening the cooperation in scientific research with domestic and international research institution.

Mở đầu

Bài toán xác định không điểm của toán tử j -đơn điệu có ý nghĩa quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau, như khoa học vật lý, tối ưu hóa, toán kinh tế, toán tài chính... Ở đây, ta quan tâm đến bài toán sau:
Xác định một phần tử $x^* \in E$ sao cho:

$$0 \in A(x^*), \quad (0.1)$$

trong đó $A : E \longrightarrow 2^E$ là một toán tử j -đơn điệu xác định trên không gian Banach E . Ta biết rằng khi E là không gian Hilbert thì toán tử j -đơn điệu được gọi là toán tử đơn điệu.

Khi $A : H \longrightarrow 2^H$ một toán tử đơn điệu cực đại trên không gian Hilbert H , thì R. T. Rockafellar [57] đã đề xuất phương pháp điểm gần kề để xác định dãy $\{x_n\}$ như sau:

$$x_n \in c_n A x_{n+1} + x_{n+1}, \quad x_0 \in H, \quad (0.2)$$

ở đây $c_n > c_0 > 0$. Tuy nhiên, việc áp dụng phương pháp lặp (0.2) chỉ thu được sự hội tụ yếu của dãy $\{x_n\}$ về một không điểm của A .

Trong những năm gần đây, xuất phát từ một số mô hình toán thực tế trong tối ưu hóa và vật lý, bài toán tìm không điểm của tổng của hai toán tử đơn điệu cực đại hay bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu và tổng quát hơn là bài toán tìm không điểm chung của một họ hữu hạn các toán tử kiểu đơn điệu, đã thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học trên thế giới.

Năm 2005, H. H. Bauschke, P. L. Combettes và S. Reich [11] đã đề xuất kết hợp phương pháp điểm gần kề và phương pháp lặp luân phiên cho bài toán xác định không điểm của hai toán tử đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert. Tuy nhiên, họ chỉ thu được sự hội tụ yếu. Như vậy một vấn đề đặt ra là liệu rằng có thể cải tiến phương pháp lặp luân phiên cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử kiểu đơn điệu, đồng thời phương pháp đặt ra sẽ hội tụ mạnh đến nghiệm của bài toán.

Bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert hay không gian Banach là một trường hợp riêng của bài toán chấp nhận lỗi: “Tìm một phần tử thuộc giao khác rỗng của một họ hữu hạn hay vô hạn các tập con lồi và đóng $\{C_i\}_{i \in I}$ của không gian Hilbert H hay không gian Banach E ”. Bài toán này có nhiều ứng dụng quan trọng trong các lĩnh vực khoa học khác nhau như: Xử lý ảnh, khôi phục tín hiệu, vật lý, y học ... Một trong những mở rộng của lớp ánh xạ không giãn trong không gian Banach là lớp ánh xạ Bregman không giãn mạnh (không giãn theo khoảng cách Bregman). Bài toán tìm điểm bất động của ánh xạ Bregman không giãn mạnh có mối liên hệ mật thiết với các bài toán khác như bài toán chấp nhận lỗi, bài toán tìm không điểm của toán tử đơn điệu cực đại, bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân ... Do đó, việc nghiên cứu các phương pháp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn ánh xạ Bregman không giãn mạnh có nhiều

ý nghĩa quan trọng và đang được nhiều người làm toán trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu.

Mục đích của đề tài này là:

- Nghiên cứu kết hợp phương pháp lặp luân phiên với phương pháp xấp xỉ mềm hay phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach;
- Phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach;
- Nghiên cứu phương pháp lặp song song giải bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh và hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ;
- Đưa ra một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các lớp bài toán liên quan.

Nội dung chính của đề tài được chia làm bốn chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Trong chương này chúng tôi đề cập đến một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach, một số phương pháp tìm không điểm của toán tử kiểu đơn điệu (phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm), khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman, ánh xạ Bregman không giãn mạnh và một số bổ đề bổ trợ cần sử dụng trong chứng minh các định lý chính được đề cập ở những chương sau của đề tài.

Chương 2. Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

Chương này trình bày các kết quả nghiên cứu của đề tài của các tác giả T.M. Tuyen [65], J.K. Kim và T.M. Tuyen [39, 40], T.M. Tuyen và N.S. Ha [66] về phương pháp lai ghép tìm không điểm của một toán tử j -đơn điệu, phương pháp lặp luân phiên kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm hay phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach và phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn, cùng với các ứng dụng của nó cho các bài toán liên quan. Ngoài ra, chúng tôi cũng xây dựng một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các phương pháp.

Chương 3. Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach

Chương này trình bày các kết quả nghiên cứu về phương pháp lặp song song của chủ nhiệm đề tài trong tài liệu [64] cho bài toán xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach, cùng với đó là một số ứng dụng cho các bài toán liên quan.

Chương 4. Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh

Chương này trình bày các kết quả đạt được của đề tài từ bài báo [62, 63] về hai phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm một điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ, cùng với đó là một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các bài toán liên quan.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Chương này bao gồm 4 mục, trong đó: Mục 1.1 giới thiệu sơ lược về một số đặc trưng cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach. Mục 1.2 đề cập đến một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu, bao gồm phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm. Mục 1.3 giới thiệu về khoảng cách Bregman, phép chiếu Bregman và toán tử Bregman không giãn mạnh. Mục 1.4 trình bày một số bổ đề hỗ trợ cần sử dụng đến trong chứng minh các định lý được đề cập trong các chương sau của đề tài.

- 1.1. Một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach
- 1.2. Một số phương pháp tìm không điểm của toán tử j -đơn điệu
 - 1.2.1. Phương pháp điểm gần kề
 - 1.2.2. Phương pháp lặp kiểu Halpern
 - 1.2.3. Phương pháp xấp xỉ mềm
- 1.3. Khoảng cách Bregman và ánh xạ Bregman không giãn mạnh
 - 1.3.1. Khoảng cách Bregman và phép chiếu Bregman
 - 1.3.2. Ánh xạ Bregman không giãn mạnh
- 1.4. Một số bổ đề hỗ trợ

Chương 2

Xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

Trong chương này đề tài tập trung trình bày lại các kết quả nghiên cứu đạt được dựa trên sự kết hợp giữa phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp Mann, phương pháp lặp Halpern, phương pháp xấp xỉ gắn kết hay phương pháp prox-Tikhonov với phương pháp lặp luân phiên cho bài toán tìm không điểm của một toán tử j -đơn điệu, không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach. Ngoài ra, trong chương này chúng tôi cũng đề cập đến một số ứng dụng cho các lớp bài toán khác như: Bài toán tìm điểm cực tiểu chung của hai phiếm hàm lồi, bài toán chấp nhận lồi, bài toán bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng. Cùng với đó, chúng tôi cũng giới thiệu một ví dụ số được lập trình và thử nghiệm số dựa trên phần mềm MATLAB nhằm minh họa thêm cho các phương pháp lặp.

2.1. Phương pháp xấp xỉ mềm lai ghép

Ta có định lý sau [?]:

Định lý 2.1. *Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều, A là một toán tử m - j -đơn điệu trong E với $C = A^{-1}(0) \neq \emptyset$ và cho $f : E \rightarrow K = \overline{D(A)}$ là một ánh xạ co với hệ số co $\beta \in [0, 1)$. Giả sử $F : E \rightarrow E$ là δ - j -đơn điệu mạnh và λ -giả co chặt với $\delta + \lambda > 1$. Cho trước các dãy số $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$ trong $[0, 1]$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ trong $(0, 1]$ và $\{r_n\} \subset [\varepsilon, \infty)$ với $\varepsilon > 0$, giả sử rằng các điều kiện sau đúng:*

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0 \text{ và } \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n = \infty;$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n \mu_n}{\beta_n} = 0;$$

$$(iii) \{\alpha_n\} \subset [a, b], \text{ với } a, b \in (0, 1);$$

Khi đó, với bất kỳ $x_0 \in E$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n, \\ x_{n+1} = \beta_n f(x_n) + (1 - \beta_n) [J_{r_n} y_n - \lambda_n \mu_n F(J_{r_n} y_n)], \end{cases} \quad \forall n \geq 0, \quad (2.1)$$

hội tụ mạnh về một không điểm p của A , là nghiệm duy nhất của bất đẳng thức biến phân $VI^*(I - f, C)$, tức là

$$\langle (I - f)p, j(p - u) \rangle \leq 0, \quad \forall u \in C.$$

2.2. Phương pháp điểm gần kề kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

2.2.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ

Các tác giả J.K. Kim và T.M. Tuyên đã chứng minh định lý sau:

Định lý 2.2. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rB)$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq \varepsilon$, $\gamma_n \geq \varepsilon$ với $\varepsilon > 0$ và với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$,

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$y_n = J_{\beta_n}^A x_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.2)$$

$$x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

trong đó u và x_0 là các phần tử bất kỳ trong C . Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, trong đó $Q_S : C \longrightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Tiếp theo, các tác giả J.K. Kim và T.M. Tuyên cũng đã nghiên cứu sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z_n\}$ được xác định bởi $z_0 \in C$ và

$$d_n = J_{\beta_n}^A z_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.4)$$

$$z_{n+1} = \alpha_n f(d_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B d_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

trong đó $f : C \longrightarrow C$ là một ánh xạ co từ C vào C với hệ số co là $c \in [0, 1)$. Họ đã chứng minh kết quả dưới đây:

Định lý 2.3. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I+rB)$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;

- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.4) và (2.5) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

Ta biết rằng nếu A là toán tử m - j -đơn điệu, thì A thỏa mãn điều kiện miền. Do đó, ta có kết quả sau:

Định lý 2.4. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : E \longrightarrow 2^E$ và $B : E \longrightarrow 2^E$ là hai toán tử m - j -đơn điệu sao cho $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.4) và (2.5) hội tụ mạnh về một phần tử $x^* \in S$ sao cho $Q_S f(x^*) = x^*$.

2.2.2. Tính ổn định của phương pháp

Trong mục này chúng tôi trình bày về tính ổn định của phương pháp lặp (2.4) và (2.5) ở dạng sau:

$$v_n = J_{\beta_n}^{A^n} u_n, \quad u_0 \in C, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.6)$$

$$u_{n+1} = \alpha_n f(v_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^{B^n} v_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

trong đó $A^n : D(A^n) \subseteq C \longrightarrow 2^E$, $A^n : D(A^n) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu với $D(A^n) = D(A)$, $D(B^n) = D(B)$ và sao cho

$$\mathcal{H}(A^n(x), A(x)) \leq g_A(\|x\|) h_n^A, \quad \mathcal{H}(B^n(x), B(x)) \leq g_B(\|x\|) h_n^B \quad (2.8)$$

với g_A , g_B là các hàm bị chặn (ảnh của tập bị chặn là tập bị chặn) xác định với $t \geq 0$, thỏa mãn $g_A(0) = 0$, $g_B(0) = 0$ và $\{h_n^A\}$, $\{h_n^B\}$ là các dãy số thực dương.

Ta có các kết quả sau:

Định lý 2.5. Cho E là một không gian Banach lồi đều và trơn đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \longrightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn $S = A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset$, $\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Nếu các điều kiện sau đúng

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;

- iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$ với mọi n , $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$;
- iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n h_n^A < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n h_n^B < \infty$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n h_n^A / \alpha_n = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n h_n^B / \alpha_n = 0$,

thì dãy $\{u_n\}$ xác định bởi (2.6) và (2.7) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

2.3. Phương pháp prox-Tikhonov xấp xỉ không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu

2.3.1. Phương pháp lặp và sự hội tụ

Định lý 2.6. Cho E là một không gian Banach phản xạ với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subseteq C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subseteq C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.
- (ii) $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy trong $[\varepsilon, \infty)$, với $\varepsilon > 0$.

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$x_{2n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n u + (1 - \alpha_n)x_{2n}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.9)$$

$$x_{2n} = J_{\gamma_n}^B(x_{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

trong đó u và x_0 là các phần tử bất kỳ trong C . Nếu $\{x_n\}$ là chính qui tiệm cận, thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, với $Q_S : C \rightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Định lý 2.7. Cho E là một không gian Banach phản xạ, lồi chặt với chuẩn khả vi gâteaux đều sao cho mọi tập con lồi, compact yếu của E có tính chất điểm bất động đối với ánh xạ không giãn. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E . Cho $A : D(A) \subset C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subset C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$.

(ii) $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy trong $[\varepsilon, \infty)$, với $\varepsilon > 0$.

Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi (2.9) và (2.10). Nếu $\{x_n\}$ là chính qui tiệm cận, thì $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $Q_S u$, trong đó $Q_S : C \rightarrow S$ là ánh xạ co rút không giãn theo tia từ C lên S .

Bổ đề 2.1. Cho E là một không gian Banach lồi đều. Nếu các dãy $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, và $\{\gamma_n\}$ thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq \varepsilon$, $\gamma_n \geq \varepsilon$, với $\varepsilon > 0$ nào đó và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$,

khi đó dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (2.9) và (2.10) là chính qui tiệm cận.

Tiếp theo, ta nghiên cứu sự hội tụ mạnh của dãy lặp $\{z_n\}$ xác định bởi

$$z_{2n+1} = J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(z_{2n}) + (1 - \alpha_n)z_{2n}), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.11)$$

$$z_{2n} = J_{\gamma_n}^B(z_{2n-1}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

trong đó $f : C \rightarrow C$ là một ánh xạ co từ C vào chính nó với hệ số co là $c \in [0, 1)$.

Định lý 2.8. Cho E là một không gian Banach lồi đều với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho C là một tập con lồi, đóng và khác rỗng của E và cho $f : C \rightarrow C$ là ánh xạ co từ C vào chính nó. Cho $A : D(A) \subset C \rightarrow 2^E$ và $B : D(B) \subset C \rightarrow 2^E$ là các toán tử j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset,$$

$\overline{D(A)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rA)$ và $\overline{D(B)} \subset C \subset \cap_{r>0} R(I + rB)$. Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$, với mọi n , and $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$ và $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{z_n\}$ xác định bởi (2.11) và (2.12) hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$.

2.3.2. Tính ổn định của phương pháp

Ta đã biết rằng nếu toán tử A là m - j -đơn điệu, thì A thỏa mãn điều kiện miền. Do đó, ta có kết quả sau:

Định lý 2.9. Cho E là một không gian Banach lồi đều với tính liên tục yếu theo dãy của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc j hoặc có chuẩn khả vi Gâteaux đều và cho $f : E \rightarrow E$ là ánh xạ co. Cho $A : E \rightarrow 2^E$ và $B : E \rightarrow 2^E$ là các toán tử m - j -đơn điệu thỏa mãn

$$S := A^{-1}0 \cap B^{-1}0 \neq \emptyset.$$

Cho $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ là các dãy số thực dương thỏa mãn các điều kiện:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$;
- (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$ hoặc
- (ii*) $\lim_{n \rightarrow 0} \alpha_{n+1}/\alpha_n = 1$;
- (iii) $\beta_n \geq r > 0$, $\gamma_n \geq r > 0$, với mọi n và $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} |\gamma_{n+1} - \gamma_n| < \infty$.

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_0 \in E$ và

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= J_{\beta_n}^A(\alpha_n f(u_{2n}) + (1 - \alpha_n)u_{2n} + e_n), \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{2n} &= J_{\gamma_n}^B(u_{2n-1} + e'_n), \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

hội tụ mạnh về phần tử $x^* \in S$ thỏa mãn $Q_S f(x^*) = x^*$, với $\{e_n\}$ và $\{e'_n\}$ là các dãy sai số thỏa mãn các điều kiện:

- (iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \|e_n\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \|e'_n\| < \infty$ hoặc
- (iv*) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_n\|/\alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e'_n\|/\alpha_n = 0$.

2.4. Xấp xỉ điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn

Định lý 2.10. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H với $\text{diam}(C) < \infty$. Cho $\mathcal{T}_i = \{T_{i,n}\}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là dãy các ánh xạ gần

không giãn từ C vào H tương ứng với dãy $\{a_{i,n}\}$ sao cho $S = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(\mathcal{T}_i) \neq \emptyset$.

Cho $T_i : C \rightarrow H$, $i = 1, 2, \dots, N$ xác định bởi $T_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{i,n}(x)$ với mọi $x \in C$.

Giả sử rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_C(T_{i,n}, T_i) = 0$ và $\bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(T_i) = \bigcap_{i=1}^N \text{Fix}(\mathcal{T}_i)$. Với điểm ban đầu

tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi:

$$\begin{cases} y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ C_n^i = \{z \in C : \|y_n^i - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i,n})a_{i,n}\}, \\ C_n = \bigcap_{i=1}^N C_n^i, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

hoặc

$$\begin{cases} y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \in \underset{i=1,2,\dots,N}{\operatorname{argmax}} \{\|y_n^i - x_n\|\}, \\ \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in C : \|\bar{y}_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i_n,n})a_{i_n,n}\}, \\ Q_n = \{z \in C : \langle x_n - z, x_0 - x_n \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} = P_{C_n \cap Q_n}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

trong đó $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Định lý 2.11. Cho C , $\mathcal{T}_i = \{T_{i,n}\}$, T_i với $i = 1, 2, \dots, N$ được giả thiết tương tự như trong Định lý 2.10. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_n\}$ trong C xác định bởi:

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ C_n^i = \{z \in C_n : \|y_n^i - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i,n})a_{i,n}\}, \\ C_{n+1} = \bigcap_{i=1}^N C_n^i, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

hoặc

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_n^i = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) T_{i,n}(x_n), \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \in \underset{i=1,2,\dots,N}{\operatorname{argmax}} \{\|y_n^i - x_n\|\}, \\ \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|\bar{y}_n - z\|^2 \leq \|x_n - z\|^2 + (2\text{diam}(C) + a_{i_n,n})a_{i_n,n}\}, \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}(x_0), \quad n \geq 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

trong đó $0 \leq \alpha_n \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Chương 3

Xấp xỉ nghiệm của bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach

Trong chương này, đề tài tập trung trình bày các kết quả về phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach

3.1. Sự hội tụ của phương pháp lặp song song

Cho E và F là các không gian Banach lồi đều và trơn và cho J_E, J_F là các ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc trên E và F , tương ứng. Cho $A_i, i = 1, 2, \dots, N$ và $B_j, j = 1, 2, \dots, M$ là các toán tử đơn điệu cực đại từ E vào 2^{E^*} và F vào 2^{F^*} , tương ứng. Cho J_λ^i và Q_μ^j là các toán tử giải metric của A_i với $\lambda > 0$ và B_j với $\mu > 0$, tương ứng. Cho $T: E \rightarrow F$ là một toán tử tuyến tính bị chặn sao cho $T \neq 0$ và T^* là toán tử liên hợp của T . Giả sử $S = \cap_{i=1}^N A_i^{-1}0 \cap T^{-1}(\cap_{j=1}^M B_j^{-1}0) \neq \emptyset$.

Xét bài toán sau:

$$\text{Tìm một phần tử } x^* \in S. \quad (3.1)$$

Để giải Bài toán (3.1), ta xây dựng phương pháp lặp sau:

Cho $x_1 \in E$ và $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$\begin{aligned} z_{j,n} &= x_n - r_n J_E^{-1} T^* (J_F(Tx_n - Q_{\mu_n}^j Tx_n)), \quad j = 1, 2, \dots, M, \\ \text{Chọn } j_n \text{ sao cho } \|z_{j_n,n} - x_n\| &= \max_{j=1,\dots,M} \|z_{j,n} - x_n\|, \text{ đặt } z_n = z_{j_n,n}, \\ y_{i,n} &= J_{\lambda_n}^i z_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ \text{Chọn } i_n \text{ sao cho } \|y_{i_n,n} - z_n\| &= \max_{i=1,\dots,N} \|y_{i,n} - z_n\|, \text{ đặt } y_n = y_{i_n,n}, \\ C_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_n - z_n) \rangle \geq r_n \|Tx_n - Q_{\mu_n}^{j_n} Tx_n\|^2\}, \\ D_n &= \{z \in E : \langle y_n - z, J_E(z_n - y_n) \rangle \geq 0\}, \\ Q_n &= \{z \in E : \langle x_n - z, J_E(x_1 - x_n) \rangle \geq 0\}, \\ x_{n+1} &= P_{C_n \cap D_n \cap Q_n} x_1, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

trong đó $\{\lambda_n\}, \{\mu_n\} \subset (0, \infty)$ và $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn các bất đẳng thức sau:

$$0 < a \leq r_n, \text{ and } 0 < b \leq \lambda_n, \mu_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trước hết, ta có các bổ đề sau: Sự hội tụ mạnh của phương pháp lặp (3.2) được cho bởi định lý sau:

Định lý 3.1. *Dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (3.2) hội tụ mạnh về một phần tử $z_0 \in S$, trong đó $z_0 = P_S x_1$.*

3.2. Ứng dụng

3.2.1. Bài toán điểm cực tiểu tách

3.2.2. Bài toán chấp nhận tách

Chương 4

Điểm bất động chung của ánh xạ Bregman không giãn mạnh

Trong chương này, chúng tôi đề cập đến hai phương pháp lặp song song dựa trên phương pháp lai chiếu và phương pháp chiếu co hẹp cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh trong không gian Banach phản xạ cùng với một số ứng dụng cho các bài toán liên quan (bài toán chấp nhận lỗi, bài toán tìm không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại, bài toán cân bằng, bài toán bất đẳng thức biến phân).

4.1. Phương pháp lặp song song

Cho X là một không gian Banach phản xạ và cho $T_i : X \rightarrow X$, $i = 1, 2, \dots, N$, là N toán tử BSNE với $F(T_i) = \hat{F}(T_i)$ với mọi $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ và $F = \bigcap_{i=1}^N F(T_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X .

Định lý 4.1. Cho $\{x_n\}$ là dãy được xác định bởi

$$\begin{cases} y_n^i = T_i x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in X : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in X : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.1)$$

Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ mạnh về $\operatorname{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 4.2. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} C_0 = X, \\ y_n^i = T_i x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \operatorname{argmax}_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \operatorname{proj}_{C_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.2)$$

hội tụ mạnh về $\operatorname{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2. Ứng dụng

4.2.1. Bài toán chấp nhận lỗi

Định lý 4.3. Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X , sao cho $C = \bigcap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bị chặn, khả

vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.2) với $T_i = \text{proj}_{C_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_C^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2.2. Không điểm chung của các toán tử đơn điệu cực đại

Định lý 4.4. Cho $A_i : X \rightarrow 2^{X^*}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử đơn điệu cực đại sao cho $F = \cap_{i=1}^N A_i^{-1}0 \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.2) với $T_i = \text{Res}_{A_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2.3. Bài toán cân bằng

Định lý 4.5. Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Cho $g_i : C_i \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N song hàm thỏa mãn các điều kiện C1-C4 sao cho $S = \cap_{i=1}^N EP(g_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bậc, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.2) với $T_i = \text{Res}_{g_i}^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2.4. Không điểm chung của các toán tử Bregman ngược đơn điệu mạnh

Ta giả sử hàm Legendre f thỏa mãn điều kiện miền sau:

$$\text{ran}(\nabla f - A) \subset \text{ran}(\nabla f). \quad (4.3)$$

Định lý 4.6. Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X sao cho $C = \cap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $A_i : X \rightarrow 2^{X^*}$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử BISM sao cho $C_i \subset \text{dom}A_i$ và $S = \cap_{i=1}^N A_i^{-1}(0) \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử điều kiện miền (4.3) được thỏa mãn với mỗi A_i . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.2) với $T_i = A_i^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.2.5. Bất đẳng thức biến phân

Định lý 4.7. Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là N các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X sao cho $C = \cap_{i=1}^N C_i \neq \emptyset$. Cho $A_i : X \rightarrow X^*$, $i = 1, 2, \dots, N$ là N toán tử BISM sao cho $C_i \subset \text{dom}A_i$ và $S = \cap_{i=1}^N VI(C_i, A_i) \neq \emptyset$. Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm Legendre, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử điều kiện miền (4.3) được thỏa mãn với mỗi A_i . Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi (4.1) hoặc (4.2) với $T_i = A_i^f$ với mọi $i = 1, 2, \dots, N$, hội tụ mạnh về $\text{proj}_S^f(x_0)$, khi $n \rightarrow +\infty$.

4.3. Hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát

Cho C_i , $i = 1, 2, \dots, N$ là các tập con lồi, đóng và khác rỗng của X . Cho $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ là hàm Legendre bức, bị chặn, khả vi Fréchet đều và lồi hoàn toàn trên các tập con bị chặn của X . Giả sử $\Theta_i : C_i \times C_i \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện C1)-C4), $\varphi_i : C_i \rightarrow \mathbb{R}$ là các hàm lồi nửa liên tục dưới từ C_i vào $\mathbb{R}$ và $\Psi_i : C_i \rightarrow X^*$ là các toán tử đơn điệu, liên tục, với mọi $i = 1, 2, \dots, N$. Giả sử rằng $F = \cap_{i=1}^N GMEP(\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i) \neq \emptyset$.

Chúng tôi đã thu được các kết quả dưới đây:

Định lý 4.8. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_n = \{z \in X : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ Q_n = \{z \in X : \langle \nabla f(x_0) - \nabla f(x_n), z - x_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{C_n \cap Q_n}^f(x_0), \quad n \geq 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 4.9. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} C_0 = X, \\ y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : D_f(z, \bar{y}_n) \leq D_f(z, x_n)\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{C_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.5)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Định lý 4.10. Với mỗi $x_0 \in X$, dãy $\{x_n\}$ xác định bởi

$$\begin{cases} Q_0 = X, \\ y_n^i = \text{Res}_{\Theta_i, \varphi_i, \Psi_i}^f x_n, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ i_n := \arg\max_{i=1,2,\dots,N} \{D_f(y_n^i, x_n)\}, \quad \bar{y}_n = y_n^{i_n}, \\ Q_{n+1} = \{z \in Q_n : \langle \nabla f(x_n) - \nabla f(\bar{y}_n), z - \bar{y}_n \rangle \leq 0\}, \\ x_{n+1} = \text{proj}_{Q_{n+1}}^f(x_0), \end{cases} \quad (4.6)$$

hội tụ mạnh về $\text{proj}_F^f(x_0)$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Kết luận

Trong đề tài, chúng tôi đã đạt được một số kết quả cơ bản sau:

- Trình bày một số vấn đề cơ bản về cấu trúc hình học của không gian Banach; một số phương pháp lặp để xấp xỉ không điểm của toán tử j -đơn điệu (phương pháp điểm gần kề, phương pháp lặp kiểu Halpern và phương pháp xấp xỉ mềm);
- Đề xuất phương pháp lai ghép xấp xỉ không điểm của một toán tử m - j -đơn điệu;
- Trình bày kết quả đạt được của đề tài về phương pháp lặp luân phiên kết hợp với phương pháp xấp xỉ mềm và phương pháp prox-Tikhonov cho bài toán tìm không điểm chung của hai toán tử j -đơn điệu trong không gian Banach;
- Đề xuất các phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn dãy ánh xạ gần không giãn trong không gian Hilbert;
- Phương pháp lặp song song cho bài toán không điểm chung tách trong không gian Banach;
- Trình bày hai phương pháp lặp song song cho bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn toán tử Bregman không giãn mạnh và hệ bài toán cân bằng hỗn hợp tổng quát trong không gian Banach phản xạ;
- Đưa ra một số ứng dụng của các kết quả thu được cho các bài toán liên quan, cùng với đó là một số ví dụ đơn giản nhằm minh họa thêm cho các phương pháp.