ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÁO CÁO TỔNG KẾT
ĐỀ TÀI KHOA HỌC VÀ CÔNG NGHỆ CẤP ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP LẶP HIỆN GIẢI BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN VỚI TOÁN TỬ LOẠI ĐƠN ĐIỆU

Mã số: ĐH2016-TN06-02

Xác nhận của tổ chức chủ trì
(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên)

Nguyễn Song Hà

THÁI NGUYÊN - 2018

DANH SÁCH NHỮNG THÀNH VIÊN THAM GIA NGHIÊN CỨU ĐỀ TÀI VÀ ĐƠN VỊ PHỐI HỢP CHÍNH

I. Thành viên thực hiện đề tài

• PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

• TS. Bùi Việt Hương - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

• TS. Trần Xuân Quý - Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

II. Đơn vị phối hợp thực hiện

• Viện CNTT, Viện Hàn lâm Khoa học và Công nghệ Việt Nam (Người đại diện đơn vị là GS.TS. Nguyễn Bường)

Mục lục

Danh mục ký hiệu và chữ viết tắt

H	không gian Hilbert thực
E	không gian Banach thực
E^*	không gian đối ngẫu của E
S_E	mặt cầu đơn vị của E
E^{**}	không gian liên hợp thứ hai của E
$\mathbb{R}$	tập hợp các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập hợp các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide thực n chiều
$\mathbb{N}$	tập hợp các số tự nhiên
$\emptyset$	tập hợp rỗng
$\forall$	với mọi
$\cap$ hoặc $\bigcap$	phép giao
$d(x, C)$	khoảng cách từ phần tử x đến tập hợp C
P_C	phép chiếu mêtric từ E (hoặc H) lên C
I	ánh xạ đơn vị
$\langle x, x^* \rangle$	giá trị của $x^* \in E^*$ tại điểm $x \in E$
$\langle x, y \rangle$	tích vô hướng của $x \in H$ và $y \in H$
x^T	chuyển vị của véctơ x
J	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc
j	ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc đơn trị
μ	giới hạn Banach
$\nabla\varphi(x)$	gradient của hàm $\varphi(x)$

$R(F)$	miền ảnh của ánh xạ F
$D(F)$	miền xác định của ánh xạ F
$\mathrm{Fix}(T)$	tập điểm bất động của ánh xạ T
$\mathrm{VIP}(A, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân với $A : C \to H$
$Sol(\mathrm{VIP}(A, C))$	tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VI}(A, C)$
$\mathrm{VIP}^*(F, C)$	bài toán bất đẳng thức biến phân trên $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ với $F : E \to E$
$Sol(\mathrm{VIP}^*(F, C))$	tập nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$
A^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ A
J_r^A	toán tử giải của ánh xạ A với $J_r^A := (I + rA)^{-1}$
J^A	toán tử giải của ánh xạ A tương ứng với $r = 1$
$\limsup_{k\to\infty} x_k$	giới hạn trên của dãy $\{x_k\}$
$\liminf_{k\to\infty} x_k$	giới hạn dưới của dãy $\{x_k\}$
$x_k \to x_0$	$\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới x_0
$\mathrm{diam}(C)$	đường kính của tập C
$\mathcal{B}(C)$	tập các tập con bị chặn của C
$D_C(T_i, T_j)$	khoảng cách $D_C(T_i, T_j) = \sup_{x\in C} \|T_i(x) - T_j(x)\|$

Danh sách bảng

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

THÔNG TIN KẾT QUẢ NGHIÊN CỨU

1. Thông tin chung

- Tên đề tài: Phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân với toán tử loại đơn điệu
- Mã số: ĐH2016-TN06-02
- Chủ nhiệm: ThS. Nguyễn Song Hà
- Tổ chức chủ trì: Trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên
- Thời gian thực hiện: 08/2016 - 08/2018

2. Mục tiêu

- Xây dựng phương pháp lặp mới có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được. Đưa ra điều kiện và chứng minh sự hội tụ của phương pháp.
- Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị lồi.
- Góp phần nâng cao năng lực nghiên cứu cho cán bộ giảng dạy Toán học giải tích và Toán học ứng dụng của Đại học; phục vụ hiệu quả cho công tác NCKH và đào tạo sau đại học chuyên ngành Toán giải tích và Toán ứng dụng của Đại học Thái Nguyên.
- Mở rộng hợp tác nghiên cứu khoa học với các cơ sở nghiên cứu ngoài Đại học.

3. Tính mới, tính sáng tạo

- Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân. Các phương pháp mới có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được.
- Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa.
- Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị hàm lồi.

4. Kết quả nghiên cứu

- Đề xuất phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp để tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực. Đồng thời áp dụng phương pháp mới xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.
- Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho một lớp

bài toán bất đẳng thức biến phân trên không gian Banach thông qua đề xuất mới và sử dụng các ánh xạ $\tilde{S}_k, \hat{S}_k$ và S^k.

- Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa cho các thuật toán mới đề xuất và tương quan với một số phương pháp đã có.

5. Sản phẩm

5.1. Sản phẩm khoa học

- Có 05 bài báo đăng trên tạp chí Khoa học

(1) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "A new explicit iteration method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, 72, pp. 467-481.

(2) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "Hybrid steepest-descent method with a countably infinite family of nonexpansive mappings on Banach spaces", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 21, pp. 273-287.

(3) Buong Ng., Quynh. V. X., Thuy Ng. T. T. (2016), "A steepest-descent Krasnosel'skii–Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory and Appl.*, 18, pp. 519-532.

(4) Ha Ng. S., Buong Ng., Thuy Ng. T. T. (2017), "A new simple parallel iteration method for a class of variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, DOI 10.1007/s40306-017-0228-x.

(5) Tuyen T. M., Ha Ng. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.

5.2. Sản phẩm đào tạo

- Có 01 đề tài sinh viên NCKH đã nghiệm thu

(1) Nguyễn Quang Hưng (2016), "Một số phương pháp xấp xỉ tìm cực trị của hàm phi tuyến", *Đề tài sinh viên NCKH*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

- Có 01 KLTN Đại học đã nghiệm thu

(1) Hà Thị Thanh Hường (2017), "Tính không giãn của toán tử trong không gian Hilbert", *Khóa luận tốt nghiệp*, Trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên.

6. Phương thức chuyển giao, địa chỉ ứng dụng, tác động và lợi ích mang lại của kết quả nghiên cứu

- Phục vụ công tác NCKH và đào tạo sau đại học tại Đại học Thái Nguyên.
- Tăng cường hợp tác nghiên cứu khoa học giữa các cán bộ thuộc các trường Đại học, các viện nghiên cứu (Viện Công nghệ thông tin và Viện Toán học).
- Tăng cường năng lực nghiên cứu cho nhóm thực hiện đề tài.

Thái Nguyên, ngày ... tháng 4 năm 2018

Xác nhận của tổ chức chủ trì
(ký, họ tên, đóng dấu)

Chủ nhiệm đề tài
(ký, họ tên)

Nguyễn Song Hà

INFORMATION ON RESEARCH RESULTS

1. General information

- Project title: Explicit iteration method for solving variational inequality with monotone operator type
- Code number: ĐH2016-TN06-02
- Coordinator: M.Sc. Nguyen Song Ha
- Implementing institution: TNU - University of Sciences
- Duration: From 08/2016 to 08/2018

2. Objectives

- To construct simple iterative methods which can be calculated in parallel; To introduce conditions and prove the convergence of these methods.
- To apply the approximate solution to the convex optimization problem.
- To enhance the research ability of those who teach Mathematical Analysis and Applied Mathematics, which is meaningful for conducting scientific research and teaching Mathematical Analysis and Applied Mathematics at postgraduate level at Thai Nguyen University.
- To expand scientific research cooperation with other research institutions.

3. Creativeness and innovativeness

- We have constructed new simple iterative methods for a class of variational inequality problem. Those new methods have simple formula and can be calculated in parallel.
- We have given some numerical examples for illustration.
- Those methods can be applied to approximate solution for convex optimization problem.

4. Research results

- We have proposed hybrid and shrinking projection methods to find a common fixed point of a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in real Hilbert spaces. We have also applied these new methods to approximate solution for system variational inequalities problem with the monotone operator.
- We have established some new explicit iterative methods to approximate solution for a class of variational inequality problem in Banach space based

on using mappings $\tilde{S}_k, \hat{S}_k$ and S^k.

- We have given some numerical examples for illustration and compared with some existing methods.

5. Products

5.1. Scientific publications

- There are 05 published papers:

(1) Buong, Ng., Ha, Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "A new explicit iteration method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, 72, pp. 467-481.

(2) Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "Hybrid steepest-descent method with a countably infinite family of nonexpansive mappings on Banach spaces", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 21, pp. 273-287.

(3) Buong, Ng., Quynh. V. X., Thuy Ng. T. T. (2016), "A steepest-descent Krasnosel'skii–Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory and Appl.*, 18, pp. 519-532.

(4) Ha, Ng. S., Buong, Ng., Thuy Ng. T. T. (2017), "A new simple parallel iteration method for a class of variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, DOI 10.1007/s40306-017-0228-x.

(5) Tuyen, T. M., Ha, Ng. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.

5.2. Training results

- One student scientific research successfully defended

(1) Nguyen Quang Hung (2016), "Some approximate methods to find the extremes of the nonlinear function", *Student scientific research*, Thai Nguyen University of Sciences.

- One graduation thesis successfully defended

(1) Ha Thi Thanh Huong (2017), "The nonexpansiveness of operator in Hilbert space", *Under graduation thesis*, Thai Nguyen University of Sciences.

6. Transfer alternatives, application institutions, impacts and benefits of the research results

- Being beneficial to the scientific research and postgraduate education and training at Thai Nguyen University.
- Strengthening scientific research cooperation among officials of universities and research institutes (Institute of Information Technology and Institute of Mathematics).
- Strengthening the research ability of the project team.

Mở đầu

0.1. Tính cấp thiết của đề tài

Cho H là không gian Hilbert thực và C là tập con lồi đóng khác rỗng của H. Cho $F : H \to H$ là ánh xạ xác định trên H. Mô hình bài toán bất đẳng thức biến phân cổ điển có dạng:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho: } \quad \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{0.1}$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân (0.1) đã được đề xuất vào những năm đầu của thập niên 60 thế kỉ XX, gắn liền với những nghiên cứu của Lions, Stampacchia và cộng sự [28], [39], [40]. Từ đó đến nay, bất đẳng thức biến phân luôn là một chủ đề nghiên cứu mang tính thời sự. Bài toán đã thu hút được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu bởi bài toán này bao hàm nhiều bài toán lí thuyết như: bài toán cực trị [34], [63]; bài toán điểm bất động [1], [34]; bài toán cân bằng [22], [23], [35]; bài toán bù [21], [34]; phương trình với toán tử đơn điệu [2]; bài toán biên có dạng của phương trình đạo hàm riêng [5], [34] ... và nhiều bài toán thực tiễn như: bài toán khôi phục tín hiệu [20]; bài toán phân phối băng thông [29], [31], [32]; kiểm soát năng lượng trong hệ thống mạng CDMA [30] và kĩ thuật xử lí tín hiệu băng tần [50] ... Vì thế bài toán này là một công cụ mạnh và thống nhất trong nghiên cứu nhiều mô hình bài toán lí thuyết và ứng dụng thực tế.

Để có thể ứng dụng bài toán bất đẳng thức biến phân vào thực tiễn, chúng ta cần xây dựng những phương pháp giải số hiệu quả cho bài toán này. Vì lẽ đó, một trong những hướng nghiên cứu quan trọng hiện nay dành được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong và ngoài nước đó là việc đề xuất các phương pháp mới tìm nghiệm của bài toán (0.1) hoặc cải tiến hiệu quả của nhiều phương pháp đã có. Cho đến nay người ta đã thiết lập được nhiều kĩ thuật giải bất đẳng thức biến phân dựa trên phương pháp chiếu của Goldstein [24], Polyak [25], [38], [46], phương pháp điểm gần kề của Martinet [42], Rokaffellar [47], nguyên lý bài toán phụ của Cohen [17], phương pháp hiệu chỉnh dạng Browder-Tikhonov [7], [55], phương pháp điểm gần kề hiệu chỉnh của Lehdili và Moudafi [37], Ryazantseva [48] và phương pháp điểm gần kề quán tính do Alvarez và Attouch [3] đề xuất hoặc dựa trên một số kĩ thuật tìm điểm bất động như phương pháp lặp Krasnosel'skii-Mann [36], [43], phương pháp lặp Halpern [27] và phương pháp xấp xỉ mềm [44].

Mặt khác, nhiều bài toán thuộc lĩnh vực công nghệ truyền thông hiện đại đã đề cập ở trên có thể quy về mô hình bài toán (0.1) với C được cho dưới dạng ẩn là tập điểm bất động chung của một họ các ánh xạ không giãn T_i $(i \in \mathcal{I})$, ở đây $\mathcal{I}$ là tập chỉ số nào đó. Khi đó, một vấn đề đặt ra là xác định phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm cho bài toán (0.1) như thế nào nếu chúng ta có dạng hiện của các ánh xạ không giãn T_i? Xuất phát từ ý tưởng này, năm 2001, Yamada [61] đã xây dựng phương pháp lai ghép đường dốc nhất mà phương pháp này hội tụ mạnh về một thành phần nằm trong tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn đồng thời thỏa mãn là nghiệm của bài toán (0.1). Từ đó đến nay, đã có nhiều công trình nghiên cứu nhằm mở rộng hoặc cải tiến phương pháp của Yamada theo nhiều hướng khác nhau. Chẳng hạn, theo hướng làm giảm nhẹ điều kiện đặt lên dãy tham số lặp [9], [59], [64] hoặc mở rộng cho bài toán trong những trường hợp phức tạp hơn, chẳng hạn như khi C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn các ánh xạ không giãn [33], [57], [62] hoặc nghiên cứu mở rộng từ không gian Hilbert H tới lớp không gian Banach E [10], [11], [15], [19] ...

Có thể khẳng định rằng, bài toán bất đẳng thức biến phân đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu theo nhiều con đường tiếp cận khác nhau nhằm xây dựng các phương pháp giải hữu hiệu để có thể ứng dụng trong thực tiễn. Việc đề xuất mới và xây dựng các phương pháp giải bất đẳng thức biến phân là một vấn đề được nảy sinh một cách tự nhiên và cần thiết để làm phong phú và hoàn thiện thêm cho lý thuyết về bài toán quan trọng này. Vì những lí do đã phân tích ở trên, chúng tôi lựa chọn đề tài nghiên cứu là **"Phương pháp lặp hiện giải bất đẳng thức biến phân với toán tử loại đơn điệu"**.

0.2. Mục tiêu của đề tài

Mục tiêu của đề tài là nghiên cứu đề xuất các phương pháp lặp dạng hiện xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân. Cụ thể:

1. Xây dựng các phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán nghiên cứu có cấu trúc đơn giản và có thể tính toán song song được. Đưa ra điều kiện và chứng minh sự hội tụ của các phương pháp.

2. Xây dựng các ví dụ số cụ thể minh họa và tương quan với một số phương pháp đã có.

3. Ứng dụng xấp xỉ nghiệm cho bài toán cực trị lồi.

0.3. Nội dung nghiên cứu của đề tài

Báo cáo tổng kết đề tài gồm phần mở đầu, hai chương, kết luận và tài liệu tham khảo.

Chương 1 giới thiệu sơ lược về một số vấn đề liên quan đến cấu trúc hình học của các không gian Banach, lớp bài toán nghiên cứu, một số mệnh đề và bổ đề cần sử dụng cho việc chứng minh các kết quả nghiên cứu đạt được. Đồng thời trình bày phương pháp lặp kiểu Krasnosel'skii-Mann đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán nghiên cứu. Bên cạnh đó trình bày phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp để giải bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực cùng các ứng dụng trong việc xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân đơn điệu.

Chương 2 trình bày ba phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán nghiên cứu trên không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Bên cạnh đó, trình bày các ví dụ số cụ thể minh họa và ứng dụng trong bài toán tìm cực trị của hàm lồi.

Chương 1

Phương pháp lai ghép đường dốc nhất, chiếu lai ghép và chiếu co hẹp

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu phương pháp lai ghép đường dốc nhất xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động của ánh xạ không giãn trong không gian Banach. Bên cạnh đó, nghiên cứu phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trong không gian Hilbert thực. Đồng thời áp dụng các kết quả nghiên cứu mới theo hướng này xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với các toán tử đơn điệu.

1.1. Không gian Banach và giới hạn Banach

Cho E là không gian Banach thực, E^* và E^{**} tương ứng là không gian đối ngẫu và không gian liên hợp thứ hai của E.

Định nghĩa 1.1. Không gian Banach E được gọi là *phản xạ* nếu với mọi phần tử $x^{**} \in E^{**}$ đều tồn tại phần tử $x \in E$ sao cho

$$\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, x^{**} \rangle \quad \forall x^* \in E^*.$$

Mệnh đề 1.1. (Định lí 1.9.26, trang 42, [1])

Cho E là một không gian Banach thực. Khi đó, E là không gian phản xạ khi và chỉ khi mọi dãy bị chặn trong E đều có dãy con hội tụ yếu.

Định nghĩa 1.2. Không gian Banach E được gọi là *lồi đều* nếu với mọi $0 < \epsilon \leq 2$ và các bất đẳng thức $\|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x - y\| \geq \epsilon$ thỏa mãn thì tồn tại một số $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sao cho

$$\|(x+y)/2\| \leq 1-\delta.$$

Định nghĩa 1.3. Không gian Banach E được gọi là *lồi chặt* nếu với mọi điểm $x, y \in S_E$, $x \neq y$ thì

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1 \quad \forall \lambda \in (0,1),$$

trong đó $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ là mặt cầu đơn vị của E.

Mệnh đề 1.2. (Định lí 1.6, trang 3, [18])

Mọi không gian Banach lồi đều là lồi chặt.

Mệnh đề 1.3. (Định lí 2.2.8, trang 56, [1] hoặc Định lí 1.17, trang 8, [18])

Mọi không gian Banach lồi đều là không gian phản xạ.

Mệnh đề 1.4. (Hệ quả 2.10.3 và Định lí 2.10.4, trang 116, [1])

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach phản xạ và lồi chặt E. Khi đó, với mỗi $x \in E$ tồn tại duy nhất một điểm $y \in C$ thỏa mãn

$$\|x - y\| = d(x, C),$$

với $d(x, C) = \inf\limits_{z \in C} \|x - z\|$.

Chú ý 1.1. Điểm $y \in C$ trong Mệnh đề 1.4 còn được gọi là *xấp xỉ tốt nhất* của $x \in E$ bởi C.

Định nghĩa 1.4. Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Banach phản xạ E. Ánh xạ $P_C : E \to 2^C$ xác định bởi

$$P_C(x) = \Big\{ y \in C : \|x - y\| = d(x, C) \quad \forall x \in E \Big\}$$

được gọi là *phép chiếu mêtric* từ E lên C.

Định nghĩa 1.5. Tập con C của không gian Banach E được gọi là *tập Chebyshev* trong E nếu mỗi điểm $x \in E$ có duy nhất một điểm $y \in C$ là xấp xỉ tốt nhất của x.

Nhận xét 1.1.

i) Từ Mệnh đề 1.4 suy ra mọi tập con lồi đóng khác rỗng của một không gian Banach phản xạ và lồi chặt đều là tập Chebyshev.

ii) Với mọi tập Chebyshev $C \subset E$, ta có $P_C(x)$ là tập chỉ gồm một phần tử. Hơn nữa, $\|x - P_C(x)\| = d(x, C)$ với mọi $x \in E$.

Nhận xét 1.2. P_C là ánh xạ không giãn.

Định nghĩa 1.6. Một ánh xạ $J : E \to 2^{E^*}$ (nói chung là đa trị) thỏa mãn điều kiện

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|\|x^*\| \quad \text{và} \quad \|x^*\| = \|x\|\},$$

được gọi là *ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của* E.

Chú ý 1.2. Ánh xạ J tồn tại trên mọi không gian Banach. Khẳng định này được suy ra như một hệ quả trực tiếp của Định lí Hahn-Banach (Nhận xét 4.2, trang 25, [16] hoặc Bổ đề 3.4, trang 20, [18]). Trong trường hợp ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc là đơn trị ta sẽ kí hiệu là j.

Nhận xét 1.3. Trong không gian Hilbert H ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc J của H là ánh xạ đơn vị I.

Một số tính chất cơ bản của ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc được trình bày trong mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.5. (Mệnh đề 2.4.5, trang 69, [1])

Cho E là không gian Banach thực và $J : E \to 2^{E^*}$ là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

i) $J(0) = \{0\}$.

ii) Với mỗi $x \in E$, $J(x)$ là tập lồi đóng bị chặn và khác rỗng.

iii) $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ với mọi $x \in E$ và $\lambda \in \mathbb{R}$.

iv) Nếu E^* là không gian lồi chặt thì J là ánh xạ đơn trị.

Định nghĩa 1.7. Chuẩn của E được gọi là *khả vi Gâteaux tại điểm $x_0 \in S_E$* nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn sau

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x_0 + ty\| - \|x_0\|}{t},$$

tồn tại và kí hiệu là $\langle y, \nabla \|x_0\| \rangle$. Khi đó, $\nabla \|x_0\|$ được gọi là gradient của chuẩn $\|x\|$ tại $x = x_0$. Chuẩn của E được gọi là *khả vi Gâteaux* nếu nó khả vi Gâteaux tại mọi điểm của S_E. Chuẩn của E được gọi là *khả vi Gâteaux đều* nếu với mỗi $y \in S_E$ giới hạn trên tồn tại đều theo $x \in S_E$.

Định nghĩa 1.8. Không gian Banach E được gọi là *trơn* nếu với mỗi $x \in S_E$ tồn tại duy nhất một phiếm hàm $x^* \in E^*$ sao cho $\langle x, x^* \rangle = \|x\|$ và $\|x^*\| = 1$.

Mệnh đề 1.6. (Định lí 2.6.6, trang 92, [1])

Không gian Banach E trơn khi và chỉ khi chuẩn của E là khả vi Gâteaux trên $E \backslash \{0\}$.

Mệnh đề 1.7. [15]

Cho E là không gian Banach trơn. Khi đó, ta có

$$\|x\|^2 + 2\langle y, j(x) \rangle \leq \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y) \rangle$$

với mọi $x, y \in E$.

Mệnh đề 1.8. (Hệ quả 2.6.9, trang 93, [1])

Cho E là không gian Banach và J là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc. Khi đó, các khẳng định sau tương đương:

i) E là không gian trơn.

ii) J là đơn trị.

iii) Chuẩn của E là khả vi Gâteaux với $\nabla \|x\| = \|x\|^{-1} J(x)$.

Độ trơn của không gian Banach E còn được biểu diễn qua mô đun trơn.

Định nghĩa 1.9. Cho E là không gian Banach. Hàm $\rho_E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ được gọi là *mô đun trơn* của E nếu

$$\begin{aligned}\rho_E(t) &= \sup\left\{ \frac{\|x + y\| + \|x - y\|}{2} - 1 : \ \|x\| = 1, \|y\| = t \right\} \\ &= \sup\left\{ \frac{\|x + ty\| + \|x - ty\|}{2} - 1 : \ \|x\| = \|y\| = 1 \right\}, \quad t \geq 0.\end{aligned}$$

Tính trơn đều và q-trơn đều ($q > 1$) của không gian Banach được định nghĩa thông qua mô đun trơn như sau.

Định nghĩa 1.10. Không gian Banach E được gọi là *trơn đều* nếu

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho_E(t)}{t} = 0.$$

Mệnh đề 1.9. (Định lí 2.8.3, trang 98 và Định lí 2.8.6, trang 99, [1])

Mọi không gian Banach trơn đều là không gian trơn và phản xạ.

Định nghĩa 1.11. Với $q > 1$, không gian Banach E được gọi là không gian *q-trơn đều* nếu tồn tại hằng số $\beta > 0$ sao cho

$$\rho_E(t) \le \beta t^q, \quad t > 0.$$

Chú ý 1.3. Nếu E là không gian Banach q-trơn đều (trang 52, [18]) thì luôn tồn tại hằng số $d_q > 0$ thỏa mãn

$$\|x + y\|^q \le \|x\|^q + q\langle y, j_q(x)\rangle + d_q\|y\|^q \quad \forall x, y \in E,$$

trong đó $j_q(x) = \|x\|^{q-2}j(x)$. Khi đó, không gian Banach E còn được gọi là không gian *không gian Banach q-trơn đều với hằng số d_q*.

Mối liên hệ giữa tính trơn và lồi chặt, tính trơn đều và lồi đều của E với không gian đối ngẫu E^* của nó được phát biểu trong các mệnh đề sau.

Mệnh đề 1.10. (Định lí 2.6.5, trang 92, [1])

Cho E là không gian Banach phản xạ. Khi đó, ta có các khẳng định sau:

i) E là không gian trơn khi và chỉ khi E^* là không gian lồi chặt.

ii) E là không gian lồi chặt khi và chỉ khi E^* là không gian trơn.

Mệnh đề 1.11. (Định lí 2.8.4, trang 98 và Định lí 2.8.5, trang 99, [1])

Cho E là không gian Banach. Khi đó, Khi đó, ta có các khẳng định sau:

i) E^* là không gian lồi đều khi và chỉ khi E là không gian trơn đều.

ii) E là không gian lồi đều khi và chỉ khi E^* là không gian trơn đều.

Định nghĩa 1.12. Ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $j : E \to E^*$ được gọi là
i) *liên tục yếu theo dãy* nếu với mọi dãy $\{x_k\}$ hội tụ yếu tới điểm x thì $j(x_k)$ hội tụ tới $j(x)$ theo tôpô yếu* trong E^*.
ii) *liên tục mạnh-yếu** nếu với mọi dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới điểm x thì $j(x_k)$ hội tụ tới $j(x)$ theo tôpô yếu* trong E^*.

Mệnh đề 1.12. (Mệnh đề 5.13, trang 51, [18])

Nếu không gian Banach E có chuẩn khả vi Gâteaux đều thì ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc $j : E \to E^*$ liên tục đều mạnh-yếu* trên các tập con bị chặn của E.

Tiếp theo, chúng tôi trình bày một số kết quả cơ bản về giới hạn Banach. Xét không gian các dãy số bị chặn

$$l^\infty := \{a = (a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) : \sup_k |a_k| < \infty\}.$$

Kí hiệu $\mu_k(a_{k+m})$ thay cho $\mu(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{m+k}, \dots)$ với $m \in \mathbb{N}$.

Định nghĩa 1.13. Phiếm hàm $\mu : l^\infty \to \mathbb{R}$ được gọi là *giới hạn Banach* nếu thỏa mãn

i) μ là tuyến tính liên tục,

ii) $\|\mu\| = \mu(1, 1, \dots, 1, \dots) = 1$,

iii) $\mu_k(a_{k+1}) = \mu_k(a_k)$ với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \in l^\infty$.

Sự tồn tại của giới hạn Banach được đảm bảo nhờ Định lí Hahn-Banach.

Mệnh đề 1.13. (Định lí 2.9.4, trang 109, [1])

Luôn tồn tại phiếm hàm tuyến tính liên tục μ trên không gian l^∞ sao cho $\|\mu\| = \mu_k(1) = 1$ và $\mu_k(a_{k+1}) = \mu_k(a_k)$ với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_k, \dots) \in l^\infty$.

Một vài tính chất quan trọng của giới hạn Banach được phát biểu trong các mệnh đề dưới đây.

Mệnh đề 1.14. (Mệnh đề 2.9.5, trang 110, [1])

Cho μ là giới hạn Banach. Khi đó

$$\liminf_{k\to\infty} a_k \le \mu_k(a_k) \le \limsup_{k\to\infty} a_k,$$

với mỗi $a = (a_1, a_2, ...) \in l^\infty$. Hơn nữa, nếu $a_k \to x_0$ thì $\mu_k(a_k) = \mu(a) = x_0$.

Nhận xét 1.4. Nếu $a = (a_1, a_2, \dots) \in l^\infty$, $b = (b_1, b_2, \dots) \in l^\infty$ và $a_k - b_k \to 0$ thì $\mu_k(a_k) = \mu_k(b_k)$.

Mệnh đề 1.15. [53]

Giả sử E là không gian Banach có chuẩn khả vi Gâteaux đều và C là tập con lồi đóng khác rỗng của E. Cho $\{x_k\} \subset E$ là một dãy bị chặn, $z \in C$ và μ là giới hạn Banach. Khi đó,

$$\mu_k \|x_k - z\|^2 = \min_{u \in C} \mu_k \|x_k - u\|^2$$

khi và chỉ khi $\mu_k \langle u - z, j(x_k - z)\rangle \leq 0$ với mọi $u \in C$.

1.2. Ánh xạ liên tục Lipschitz và ánh xạ j-đơn điệu

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số khái niệm về ánh xạ liên tục L-Lipschitz, ánh xạ loại j-đơn điệu và ánh xạ γ-giả co chặt. Một số kết quả liên quan cũng được giới thiệu cụ thể.

Định nghĩa 1.14. Cho C là tập con khác rỗng của không gian Banach E.
i) Ánh xạ $T : C \to E$ được gọi là ánh xạ liên tục L-Lipschitz nếu tồn tại hằng số $L \geq 0$ sao cho

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\| \quad \forall x, y \in C. \tag{1.1}$$

ii) Trong (1.1), nếu $L \in [0, 1)$ thì T được gọi là ánh xạ co; nếu $L = 1$ thì T được gọi là ánh xạ không giãn.

Mệnh đề 1.16. (Định lí 5.2.7, trang 232, [1])

Cho C là tập con lồi trong không gian Banach lồi chặt E và $T : C \to E$ là ánh xạ không giãn. Khi đó nếu tập điểm bất động

$$\mathrm{Fix}(T) := \{x \in C : T(x) = x\}$$

của ánh xạ T là khác rỗng thì nó là tập lồi.

Chú ý 1.4. Do tính liên tục của ánh xạ không giãn T nên tập $\mathrm{Fix}(T)$ luôn là tập đóng.

Hệ quả 1.1. (Hệ quả 5.2.9, trang 233, [1])

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng trong không gian Banach lồi chặt E và $T : C \to E$ là ánh xạ không giãn. Khi đó, $\mathrm{Fix}(T)$ *là tập lồi đóng.*

Định nghĩa 1.15. Cho E là không gian Banach. Ánh xạ $F : E \to E$ với miền xác định $D(F)$ được gọi là
i) *j-đơn điệu* nếu với mọi $x, y \in D(F)$, tồn tại $j(x-y) \in J(x-y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x-y)\rangle \geq 0.$$

ii) *j-đơn điệu mạnh với hệ số η* nếu với mọi $x, y \in D(F)$, tồn tại hằng số $\eta > 0$ và $j(x-y) \in J(x-y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x-y)\rangle \geq \eta\|x-y\|^2.$$

iii) *j-đơn điệu mạnh ngược với hệ số α* nếu với mọi $x, y \in D(F)$, tồn tại hằng số $\alpha > 0$ và $j(x-y) \in J(x-y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x-y)\rangle \geq \alpha\|F(x) - F(y)\|^2.$$

iv) *j-đơn điệu cực đại* nếu F là ánh xạ j-đơn điệu và $R(rF + I) = E$ với mỗi $r > 0$.

Chú ý 1.5. Nếu E là không gian Hilbert thì các khái niệm j-đơn điệu và j-đơn điệu mạnh với hệ số η tương ứng trùng với khái niệm ánh xạ đơn điệu và ánh xạ η-đơn điệu mạnh.

Định nghĩa 1.16. Cho E là không gian Banach. Ánh xạ $F : E \to E$ với miền xác định $D(F)$ được gọi là *γ-giả co chặt* (theo nghĩa Browder và Petryshyn [18]) nếu với mọi $x, y \in D(F)$, tồn tại hằng số $\gamma > 0$ và $j(x-y) \in J(x-y)$ sao cho

$$\langle F(x) - F(y), j(x-y)\rangle \leq \|x-y\|^2 - \gamma\|(I-F)(x) - (I-F)(y)\|^2.$$

Mệnh đề 1.17. [15]

Cho E là không gian Banach trơn và $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Khi đó,

i) Với mọi $\lambda \in (0,1)$, $I - \lambda F$ là ánh xạ co với hệ số co $1 - \lambda\tau$, trong đó $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma} \in (0,1)$.

ii) Ánh xạ $I - F$ là ánh xạ co với hệ số co $\sqrt{(1-\eta)/\gamma}$.

1.3. Một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân

1.3.1 Mô hình bài toán

Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Giả sử $\{T_i\}$ là họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$, trong đó $\mathrm{Fix}(T_i) := \{x \in E : T_i(x) = x\}$ là tập điểm bất động của ánh xạ T_i.

Lớp bài toán bất đẳng thức biến phân, kí hiệu là $\mathrm{VIP}^*(F, C)$, được phát biểu như sau:

$$\text{Tìm } x_* \in C \text{ sao cho: } \quad \langle F(x_*), j(x - x_*)\rangle \geq 0, \quad \forall x \in C, \tag{1.2}$$

trong đó j là ánh xạ đối ngẫu chuẩn tắc của E. Điểm $x_* \in C$ thỏa mãn (1.2) được gọi là *nghiệm* của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$. Tập tất cả các nghiệm của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$ được kí hiệu là $Sol(\mathrm{VIP}^*(F, C))$.

Chú ý 1.6. Bài toán (1.2) đã được Aoyama và các cộng sự [4] đề xuất lần đầu vào năm 2006 và các tác giả cũng đã chỉ ra bài toán này có liên hệ với nhiều bài toán như bài toán điểm bất động của ánh xạ phi tuyến, bài toán xác định không điểm của toán tử j-đơn điệu.

Nhận xét 1.5. Khi E là không gian Hilbert H thì bài toán (1.2) trở thành bài toán bất đẳng thức biến phân (0.1) đã đề cập đến trong phần mở đầu. Trong trường hợp này ta kí hiệu bài toán là $\mathrm{VIP}(F, C)$ và tập nghiệm tương ứng là $Sol(\mathrm{VIP}(F, C))$.

Nhận xét 1.6. Nếu $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số $\eta > 0$ thì nghiệm nếu có của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$ là duy nhất.

1.3.2 Phương pháp lai ghép đường dốc nhất

Năm 2001, Yamada [61] đã xây dựng phương pháp lai ghép đường dốc nhất mà phương pháp này hội tụ mạnh về một thành phần nằm trong tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn đồng thời thỏa mãn là nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VIP}(F, C)$. Cụ thể, khi $C := \mathrm{Fix}(T)$ là tập điểm bất động của một ánh xạ không giãn, Yamada đã thiết lập được định lí hội tụ mạnh sau.

Định lí 1.1. [61]

Cho $F : H \to H$ là ánh xạ liên tục L-Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H. Cho $T : H \to H$ là ánh xạ không giãn trên H với $\mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\rho \in (0, 2\eta/L^2)$ và dãy $\lambda_k \in (0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện:

(L1) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$,

(L2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$,

(L3) $\lim\limits_{k\to\infty} (\lambda_k - \lambda_{k+1})\lambda_{k+1}^{-2} = 0$.

Khi đó, với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in H$, dãy lặp xác định bởi

$$x_{k+1} = T(x_k) - \lambda_{k+1}\rho F(T(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{1.3}$$

hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán (0.1).

Trong trường hợp $C := \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn $T_i : H \to H$, dãy lặp xoay vòng xấp xỉ nghiệm cho bài toán (0.1) được Yamada xây dựng có dạng

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ x_{k+1} = T_{[k+1]}(x_k) - \lambda_{k+1}\rho F(T_{[k+1]}(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{1.4}$$

ở đây $[k] := k \bmod N$ là hàm modulo lấy giá trị trong tập $\{1, 2, 3, \dots, N\}$. Khi $N = 1$, phương pháp (1.4) sẽ có dạng (1.3). Sự hội tụ mạnh của phương pháp (1.4) được bảo đảm dưới các giả thiết thích hợp.

Định lí 1.2. [61]

Cho $F : H \to H$ là ánh xạ liên tục L-Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H. Cho $T_i : H \to H (i = 1, 2, 3, ..., N)$ là họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trên H với $C := \bigcap\limits_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ và

$$C = \mathrm{Fix}(T_1T_2 \dots T_N) = \mathrm{Fix}(T_2T_3 \dots T_NT_1) = \dots = \mathrm{Fix}(T_NT_1 \dots T_{N-1}).$$

Giả sử $\rho \in (0, 2\eta/L^2)$ và dãy $\lambda_k \in (0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện:

(L1) $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, (L2) $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty,$

(L3)* $\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k - \lambda_{k+N}| < \infty.$

Khi đó, với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in H$, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (1.4) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (0.1).

Khi C là tập điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực, năm 2003, Xu và Kim đã nhận được kết quả tương tự Định lí 1.1 và Định lí 1.2 khi thay thế (L3) và (L3)* tương ứng bởi các điều kiện

(L4) $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+1}} = 1$ hoặc tương đương $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+1}}{\lambda_{k+1}} = 0$

và

(L4)* $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_{k+N}} = 1$ hoặc tương đương $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k+N}}{\lambda_{k+N}} = 0.$

Có thể thấy rằng, điều kiện (L4) yếu hơn thực sự (L3), hơn nữa điều kiện (L4) cho phép ta có thể lựa chọn với dãy tham số chính tắc $\{1/k\}$ trong khi đó (L3) không thỏa mãn. Mặt khác, không khó khăn để chỉ ra rằng điều kiện (L3)* suy ra điều kiện (L4)* nếu giới hạn $\lim_{k\to\infty} \lambda_k/\lambda_{k+N}$ tồn tại. Tuy vậy, cũng lưu ý thêm rằng, trong trường hợp tổng quát các điều kiện (L3)* và (L4)* là không so sánh được (xem chi tiết trong [60]).

Năm 2007, Zeng và cộng sự [64] đã đề xuất phương pháp lặp xoay vòng

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ x_{k+1} = T_{[k+1]}(x_k) - \lambda_{k+1}\rho_{k+1}F(T_{[k+1]}(x_k)), \quad k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{1.5}$$

với tham số ρ_{k+1} không phải là hằng số cố định như trong (1.4). Kết quả của Zeng và cộng sự là sự cải biên và hợp nhất các điều kiện đặt lên các dãy tham số lặp so với kết quả mà Yamada, Xu và Kim đã nhận được.

Năm 2010, trong [41], Liu và Cui đã chứng minh rằng nếu $C \neq \emptyset$ thì

$$C := \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) = \mathrm{Fix}(T_1T_2\dots T_N) \tag{1.6}$$

là điều kiện đủ để thỏa mãn tính chất giao hoán

$$\mathrm{Fix}(T_1T_2\dots T_N) = \mathrm{Fix}(T_2T_3\dots T_NT_1) = \cdots = \mathrm{Fix}(T_NT_1\dots T_{N-1}).$$

Nhằm loại bỏ các điều kiện (L3), (L3)* và giả thiết (1.6), năm 2011, Nguyễn Bường và Lâm Thùy Dương [9] đã xây dựng dãy lặp

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ x_{k+1} = (1-\beta_k^0)x_k + \beta_k^0(I - \lambda_k \rho F)\tilde{V}_k(x_k), \ \ k = 0, 1, 2, ... \end{cases} \tag{1.7}$$

trong đó $\tilde{V}_k = T_N^k T_{N-1}^k \cdots T_1^k$, $T_i^k = (1-\beta_k^i)I + \beta_k^i T_i$ với $i = 1, 2, \ldots, N$.

Các kết quả nói trên đã nghiên cứu cải tiến theo hướng làm giảm nhẹ điều kiện đặt lên tham số lặp λ_k hoặc cải biên tham số ρ với việc giữ nguyên lược đồ lặp [59] hoặc thiết lập lược đồ lặp mới [9], [64] dựa theo tư tưởng mà Yamada đề xuất. Đồng thời, ta nhận thấy rằng các phương pháp (1.4), (1.5) và (1.7) có chung một đặc điểm là không tính toán song song được.

Nghiên cứu mở rộng cho trường hợp $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$ là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn $T_i : H \to H$, bằng việc sử dụng ánh xạ W_k xác định bởi

$$\begin{aligned} U_{k,k+1} &= I, \\ U_{k,k} &= \alpha_k T_k U_{k,k+1} + (1-\alpha_k)I, \\ U_{k,k-1} &= \alpha_{k-1} T_{k-1} U_{k,k} + (1-\alpha_{k-1})I, \\ &\ \ \cdots \\ U_{k,2} &= \alpha_2 T_2 U_{k,3} + (1-\alpha_2)I, \\ W_k = U_{k,1} &= \alpha_1 T_1 U_{k,2} + (1-\alpha_1)I, \end{aligned} \tag{1.8}$$

trong đó $\{\alpha_k\}$ là dãy các số thực dương thuộc $[0, 1]$, năm 2008, Iemoto và Takahashi [33] đã xây dựng dãy lặp hiện $\{x_k\}$ có dạng

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ x_{k+1} = (I - \lambda_k \rho F)W_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{1.9}$$

ở đây $\lambda_k \in (0, 1]$ và $\rho > 0$ là các tham số lặp.

Định lí 1.3. [33]

Cho $F : H \to H$ là ánh xạ liên tục L-Lipschitz và η-đơn điệu mạnh trên H. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên H với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix(T_i)} \neq \emptyset$.

Giả sử $\{\alpha_k\}$ *là dãy các số thực thỏa mãn* $0 < a \leq \alpha_k \leq b < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *với* $a, b \in (0, 1)$. *Khi đó, nếu các điều kiện sau bảo đảm*

i) $\rho \in (0, 2\eta/L^2)$,

ii) λ_k *thỏa mãn các điều kiện* (L1) *và* (L2)

thì dãy lặp (1.9) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* (0.1).

Phương pháp (1.9) sử dụng ánh xạ W_k kết hợp với phương pháp kiểu đường dốc nhất đã mở rộng kết quả của Yamada cho họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực. Các tác giả đã loại bỏ được điều kiện (L3) hoặc (L3)*. Tuy vậy, ánh xạ W_k có cấu trúc phức tạp và phương pháp (1.9) không tính toán song song được.

Năm 2010, với việc kết hợp phương pháp kiểu đường dốc nhất, phương pháp lặp Mann và sử dụng ánh xạ W_k, Yao và các cộng sự [62] đã thiết lập một lược đồ lặp mới

$$\begin{cases} x_1 \in H, \\ y_k = (I - \lambda_k F)(x_k), \\ x_{k+1} = (1 - \gamma_k) y_k + \gamma_k W_k(y_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{1.10}$$

trong đó $\gamma_k \in [0, 1]$ và $\lambda_k \geq 0$ là các tham số lặp.

Định lí 1.4. [62]

Cho $F : H \to H$ *là ánh xạ liên tục* L*-Lipschitz và* η*-đơn điệu mạnh trên* H. *Cho* $\{T_i\}$ *là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên* H *với* $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. *Giả sử* $\{\alpha_k\}$ *là dãy các số thực thỏa mãn* $0 < \alpha_k \leq b < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ *Khi đó, nếu các điều kiện sau bảo đảm*

i) $\gamma_k \in [\gamma, 1/2]$ *với* $\gamma > 0$,

ii) λ_k *thỏa mãn các điều kiện* (L1) *và* (L2)

thì dãy lặp (1.10) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* (0.1).

Phương pháp (1.10) là một cải biên của phương pháp (1.9). Giả thiết tham số $\gamma_k \in [\gamma, 1/2]$ với $\gamma > 0$ là một đòi hỏi chặt chẽ hơn so với điều kiện $\gamma_k \in (0, 1)$

của phương pháp lặp Mann [43] (hoặc xem Định nghĩa 6.3.3, trang 290, [1]). Giống như phương pháp (1.9), ta thấy rằng phương pháp (1.10) cũng có cấu trúc phức tạp và không tính toán song song được.

Một năm sau, trong [57], Wang cũng đã nhận được kết quả tương tự như của Yao và cộng sự. Kết quả trên của Wang đã thay thế (L1) bởi điều kiện nhẹ hơn là $0 < \lambda_k \leq \eta/L^2 - \varepsilon$, $\forall k \geq k_0$, với ít nhất một số nguyên $k_0 > 1$. Tuy nhiên, điều kiện thêm vào $\lambda_k F(x_k) \to 0$ khi $k \to \infty$ đảm bảo sự hội tụ lại là một hạn chế của phương pháp. Bởi với điều kiện này việc tính toán và kiểm tra trên máy tính là khó thực hiện.

Nghiên cứu mở rộng từ không gian Hilbert H tới lớp các không gian Banach E, năm 2008, Ceng và cộng sự [15] đã cải biên phương pháp lai ghép đường dốc nhất của Yamada. Các tác giả đã xây dựng dãy lặp ẩn có dạng:

$$\begin{cases} y_k = (I - \lambda_k \beta_k F)T(x_{k-1}), \\ x_k = \alpha_k y_k + (1 - \alpha_k)T(x_k), \quad k \geq 1 \end{cases} \tag{1.11}$$

và

$$\begin{cases} y_k = \alpha_k x_k + (1 - \alpha_k)T(y_k), \\ x_{k+1} = (I - \lambda_k \beta_k F)T(y_k), \quad k \geq 1. \end{cases} \tag{1.12}$$

trong đó λ_k, β_k và α_k là các dãy số thực thuộc $[0, 1)$. Các tác giả đã chứng minh được rằng, nếu các dãy tham số lặp trên thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \beta_k = \infty$$

thì dãy lặp (1.11) hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (1.2) với $C = \mathrm{Fix}(T)$. Nếu thêm điều kiện (L1) được thỏa thì dãy lặp (1.12) cũng sẽ hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất của bài toán (1.2). Tuy nhiên, việc xây dựng các kĩ thuật lặp ẩn cho bài toán (1.2), một khó khăn có thể gặp phải của các phương pháp đó là trong thực hành tính toán tại mỗi bước lặp, ta đều phải thực hiện các bước giải một phương trình dạng ẩn để tìm nghiệm xấp xỉ và sau một số hữu hạn bước lặp ta sẽ thu được nghiệm xấp xỉ gần với nghiệm chính xác của bài toán.

Để khắc phục khó khăn này, năm 2016, chúng tôi thiết lập phương pháp lặp dạng hiện mới kiểu Krasnosel'skii-Mann đường dốc nhất [14] như sau:

$$\begin{cases} y_k = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T(x_k), \\ x_{k+1} = (I - \lambda_k F)(y_k), \quad k \geq 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

Sự hội tụ mạnh của phương pháp được phát biểu trong định lí sau đây.

Định lí 1.5. [14]

Cho E là không gian Banach trơn đều (hoặc không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt và có chuẩn khả vi Gâteaux đều). Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho T là ánh xạ không giãn trên E với $C := \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0,1)$ thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) *và $\alpha_k \in [a,b] \subset (0,1)$. Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (1.13) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

Năm 2011, Chidume và cộng sự [19] đã nghiên cứu mở rộng kết quả của Xu và Kim [59] tới lớp không gian Banach q-trơn đều với hằng số d_q, $q > 1$ và xét cho bài toán (1.2) khi C là tập điểm bất động chung của họ hữu hạn các ánh xạ không giãn $T_i : E \to E$ $(i = 1, 2, 3, ..., N)$. Tuy nhiên, giả thiết đặt lên tham số lặp λ_k là tương tự của Xu và Kim. Thêm vào đó, các tác giả vẫn cần sử dụng giả thiết về tính giao hoán trên tập điểm bất động của các ánh xạ không giãn T_i.

Khi C là tập điểm bất động chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn trong không gian Banach thực E, thay cho việc sử dụng ánh xạ phức tạp W_k, ta có thể sử dụng ánh xạ V_k đơn giản hơn được xác định bởi

$$V_k = V_k^1,\ V_k^i = T^i T^{i+1} \dots T^k,\ T^i = (1-\alpha_i)I + \alpha_i T_i,\ 1 \leq i \leq k \tag{1.14}$$

trong đó

$$\alpha_i \in (0,1) \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i < \infty. \tag{1.15}$$

Năm 2013, Nguyễn Bường và các cộng sự [10] đã đề xuất hai phương pháp lặp ẩn mới

$$x_k = V_k(I - \lambda_k F)(x_k) \tag{1.16}$$

và

$$x_k = \gamma_k (I - \lambda_k F)(x_k) + (1-\gamma_k) V_k(x_k) \tag{1.17}$$

ở đây $\{\lambda_k\}$, $\{\gamma_k\}$ là dãy các tham số lặp dương. Dễ nhận thấy rằng, khẳng định trong hai định lí trên vẫn đúng nếu ánh xạ V_k được thay thế bởi ánh xạ W_k. Trong những năm gần đây, khắc phục nhược điểm không tính toán song song được trên máy tính và khó khăn nảy sinh từ việc áp dụng các phương pháp lặp ẩn, năm 2015, Nguyễn Bường và các cộng sự [11] đã xây dựng ánh xạ S_k trên E như sau

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{\tilde{s}_k} T_i, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i, \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.18}$$

trong đó $s_i > 0, \forall i \in \mathbb{N}$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{\infty} s_i = \tilde{s} < \infty \tag{1.19}$$

và $T_i : E \to E, i \in \mathbb{N}$ là các ánh xạ không giãn trên E. Bằng việc sử dụng ánh xạ S_k, các tác giả đã đề xuất hai phương pháp lặp hiện

$$x_{k+1} = (1 - \gamma_k)x_k + \gamma_k S_k F_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.20}$$

và

$$x_{k+1} = (1 - \gamma_k)S_k(x_k) + \gamma_k F_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \dots \tag{1.21}$$

ở đây $F_k = I - \lambda_k F$, $\{\lambda_k\}$ và $\{\gamma_k\}$ là các dãy tham số lặp dương và chứng minh được sự hội tụ mạnh của các phương pháp nêu trên. Một số nghiên cứu theo hướng này sẽ được chúng tôi cụ thể hóa trong chương sau của đề tài.

1.4. Phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp

Để giải bài toán tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert thực, năm 1996, Bauschke [6] đã mở rộng kết quả của Wittmann [58] và chứng minh được kết quả dưới đây.

Định lí 1.6. [6]

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H. Cho $T_i : C \to C$, $i = 1, 2, ..., N$ là họ hữu hạn các ánh xạ không giãn trên C với $S = \bigcap_{i=1}^{N} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$ và

$$S = \mathrm{Fix}(T_N T_{N-1} ... T_1) = \mathrm{Fix}(T_1 T_N ... T_2) = ... = \mathrm{Fix}(T_{N-1} ... T_1 T_N).$$

Giả sử, dãy $\{\alpha_k\} \in [0,1)$ *thỏa mãn các điều kiện:*

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty.$$

Khi đó, với mỗi $u \in C$ *cố định và với mọi điểm ban đầu tùy ý* $x_0 \in C$, *dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *xác định bởi*

$$x_{k+1} = \alpha_k u + (1-\alpha_k)T_{k+1}(x_k), \quad k \geq 0, \tag{1.22}$$

hội tụ mạnh tới $P_S(u)$, *trong đó* P_S *là phép chiếu từ* C *lên* S *và* $T_k = T_{[k \bmod N]}$.

Cho $\mathcal{T} = \{T_k\}$ là dãy các ánh xạ xác định trên C vào chính nó và kí hiệu $\mathrm{Fix}(\mathcal{T}) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_k)$. Cho $\{a_k\} \in [0,1)$ thỏa mãn $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Cho $\{T_k\}$ là dãy các ánh xạ xác định trên C vào H. Nhắc lại rằng, dãy $\{T_k\}$ được gọi là dãy ánh xạ gần không giãn [49] tương ứng với dãy $\{a_k\}$ nếu

$$\|T_k(x) - T_k(y)\| \leq \|x - y\| + a_k,$$

với mọi $x, y \in C$ và với mọi $k \in \mathbb{N}$. Hiển nhiên, một dãy các ánh xạ gần không giãn chứa lớp các ánh xạ không giãn.

Năm 2011, Wong và cộng sự [49] đã thiết lập được một định lí hội tụ mạnh để tìm nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân trên tập điểm bất động chung của một dãy các ánh xạ gần không giãn. Nội dung chi tiết được phát biểu trong định lí dưới đây.

Định lí 1.7. [49]

Cho C *là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực* H. *Cho* $F : C \to H$ *là ánh xạ liên tục* K*-Lipschitz và* η*-đơn điệu mạnh trên* C. *Cho* $V : C \to H$ *là ánh xạ liên tục* L*-Lipschitz trên* C. *Cho* $\mathcal{T} = \{T_k\}$ *là dãy ánh xạ gần không giãn trên* C *tương ứng với dãy* $\{a_k\}$ *sao cho* $S = \mathrm{Fix}(\mathcal{T}) \neq \emptyset$ *và* $T : C \to C$ *là ánh xạ xác định bởi* $T(x) = \lim_{k\to\infty} T_k(x)$ *với mọi* $x \in C$. *Giả thiết rằng* $\mathrm{Fix}(T) = \mathrm{Fix}(\mathcal{T})$, $0 < \beta < 2\eta/K^2$ *và* $0 \leq \gamma L < \tau$, *trong đó* $\tau = 1 - \sqrt{1 - \beta(2\eta - \mu K^2)}$. *Với mọi điểm ban đầu tùy ý* $x_0 \in C$, *xác định dãy* $\{x_k\}$ *trong* C *bởi:*

$$x_{k+1} = P_C[\alpha_k \gamma V(x_k) + (I - \alpha_k \beta F)T_k(x_k)], \quad k \geq 0, \tag{1.23}$$

trong đó $\{\alpha_k\} \in (0,1)$ *thỏa mãn các điều kiện sau:*

i) $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0,\ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty;$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1} - \alpha_k| < \infty$ *hoặc* $\lim_{k\to\infty} \alpha_{k+1}/\alpha_k = 1;$

iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{D}_B(T_k, T_{k+1}) < \infty$ *hoặc* $\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}_B(T_k, T_{k+1})/\alpha_{k+1} = 0$ *với mỗi* $B \in \mathcal{B}(C);$

iv) $\lim_{k\to\infty} a_k/\alpha_k = 0.$

Khi đó, dãy $\{x_k\}$ *hội tụ mạnh tới* $x^* \in S$ *và* x^* *là nghiệm duy nhất của bài toán* $\mathrm{VI}(\mu F - \gamma V, S)$.

Bằng một cách tiếp cận khác, dựa trên ý tưởng của phương pháp chiếu lai ghép và phương pháp chiếu co hẹp, năm 2003, Nakajo và Takahashi [45] đã đề xuất dãy lặp $\{x_k\}$ như sau

$$\begin{cases} x_0 \in C, \\ y_k = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T(x_k), \\ C_k = \{z \in C:\ \|z - y_k\| \le \|z - x_k\|\}, \\ Q_k = \{z \in C:\ \langle z - x_k, x_0 - x_k\rangle \le 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k\cap Q_k}(x_0), \quad k \ge 0, \end{cases} \tag{1.24}$$

và năm 2008, Takahashi cùng cộng sự [54] đã thiết lập lược đồ lặp

$$\begin{cases} C_0 = C, x_0 \in C, \\ y_k = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T(x_k), \\ C_{k+1} = \{z \in C_k:\ \|y_k - z\| \le \|x_k - z\|\}, \\ x_{k+1} = P_{C_{k+1}}(x_0), \quad k \ge 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

Các tác giả đã chứng minh được rằng $\{x_k\}$ xác định bởi (1.24) và (1.25) hội tụ mạnh tới $P_{\mathrm{Fix}(T)}(x_0)$ khi $\{\alpha_k\} \in [0, a)$ với ít nhất một số thực $a \in [0, 1)$.

Nghiên cứu theo hướng này, năm 2017, chúng tôi cũng đã thiết lập được bốn định lí hội tụ mạnh tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực. Phương pháp mới của chúng tôi có thể tính toán song song được và đồng thời có thể ứng dụng để tìm nghiệm của bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.

Sự hội tụ mạnh của các phương pháp chiếu lai ghép và chiếu co hẹp mới được phát biểu trong các định lí sau đây.

Định lí 1.8. [56]

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H với $\operatorname{diam}(C) < \infty$. *Cho $\mathcal{T}_i = \{T_{i,k}\}$, $i = 1, 2, ..., N$ là dãy các ánh xạ gần không giãn từ C vào H tương ứng với dãy $\{a_{i,k}\}$ sao cho $S = \bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Fix}(\mathcal{T}_i) \neq \emptyset$. Cho $T_i : C \to H$, $i = 1, 2, ..., N$ xác định bởi $T_i(x) = \lim_{k\to\infty} T_{i,k}(x)$ với mọi $x \in C$. Giả sử rằng $\lim_{k\to\infty} \mathcal{D}_C(T_{i,k}, T_i) = 0$ và $\bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Fix}(T_i) = \bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Fix}(\mathcal{T}_i)$. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_k\}$ trong C xác định bởi:*

$$\begin{cases} y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k) T_{i,k}(x_k),\ i = 1, 2, ..., N, \\ C_k^i = \{z \in C :\ \|y_k^i - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + (2\operatorname{diam}(C) + a_{i,k}) a_{i,k}\}, \\ C_k = \bigcap_{i=1}^{N} C_k^i, \\ Q_k = \{z \in C :\ \langle x_k - z, x_0 - x_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0),\ k \geq 0, \end{cases} \tag{1.26}$$

hoặc

$$\begin{cases} y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k) T_{i,k}(x_k),\ i = 1, 2, ..., N, \\ \text{Chọn } i_k \in \underset{i=1,2,...,N}{\operatorname{argmax}} \{\|y_k^i - x_k\|\}, \\ \overline{y}_k = y_k^{i_k}, \\ C_k = \{z \in C : \|\overline{y}_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + (2\operatorname{diam}(C) + a_{i_k,k}) a_{i_k,k}\}, \\ Q_k = \{z \in C : \langle x_k - z, x_0 - x_k \rangle \geq 0\}, \\ x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0),\ k \geq 0, \end{cases} \tag{1.27}$$

trong đó $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Định lí 1.9. [56]

Cho C, $\mathcal{T}_i = \{T_{i,k}\}$, T_i với $i = 1, 2, ..., N$ được giả thiết tương tự như trong Định lí 1.8. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_k\}$ trong C xác định bởi:

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T_{i,k}(x_k), \ \ i = 1, 2, ..., N, \\ C_k^i = \{z \in C_k : \ \|y_k^i - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + (2\mathrm{diam}(C) + a_{i,k})a_{i,k}\}, \\ C_{k+1} = \bigcap\limits_{i=1}^{N} C_k^i, \\ x_{k+1} = P_{C_{k+1}}(x_0), \ \ k \geq 0, \end{cases} \tag{1.28}$$

hoặc

$$\begin{cases} C_0 = C, \\ y_k^i = \alpha_k x_k + (1-\alpha_k)T_{i,k}x_k, \ \ i = 1, 2, ..., N, \\ \text{\textit{Chọn} } i_k \in \underset{i=1,2,...,N}{\mathrm{argmax}}\{\|y_k^i - x_k\|\}, \\ \overline{y}_k = y_k^{i_k}, \\ C_{k+1} = \{z \in C_k : \ \|\overline{y}_k - z\|^2 \leq \|x_k - z\|^2 + (2\mathrm{diam}(C) + a_{i_k,k})a_{i_k,k}\}, \\ x_{k+1} = P_{C_{k+1}}(x_0), \ \ k \geq 0, \end{cases} \tag{1.29}$$

trong đó $0 \leq \alpha_k \leq \alpha < 1$. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Chúng ta biết rằng, dưới các giả thiết thích hợp, nhiều bài toán lí thuyết và thực tế có thể quy về mô hình bài toán xác định không điểm của toán tử có dạng:

$$\text{Tìm } x \in C \text{ sao cho: } \quad 0 \in A(x),$$

trong đó $A : C \to H$ là toán tử xác định trên tập con lồi đóng khác rỗng C của không gian Hilbert thực H.

Năm 1970, Martinet [42] đề xuất phương pháp điểm gần kề giải bài toán trên khi A là toán tử đơn điệu cực đại. Dãy lặp được cấu trúc như sau:

$$\begin{cases} x_0 \in H, \\ x_{k+1} = J_{r_k}^A(x_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{1.30}$$

trong đó $\{r_k\}$ là dãy các số thực dương và $J^A_{r_k} = (I + r_k A)^{-1}$ là toán tử giải của A. Năm 1976, Rockafellar [47] đã cải biên phương pháp trên dưới dạng

$$x_k + e_k \ni x_{k+1} + c_k A(x_{k+1}) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.31}$$

trong đó $\{e_k\}$ là dãy sai số và $\{c_k\}$ dãy các tham số hiệu chỉnh dương. Phương pháp (1.31) có thể được viết lại như sau

$$x_{k+1} = J^A_{r_k}(x_k + e_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{1.32}$$

Tuy nhiên, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi (1.30) và (1.31) chỉ hội tụ yếu. Năm 2000, Solodov và Svaiter [51] đã đề xuất phương pháp mới như sau: Chọn $x_0 \in H$ tùy ý và $\sigma \in [0, 1)$. Tại mỗi bước lặp k có x_k thì chọn $\mu_k > 0$ và tìm một nghiệm gần đúng (y_k, v_k) của phương trình

$$0 \in A(x) + \beta_k(x - x_k),$$

với dung sai cho phép σ. Xác định dãy $\{x_k\}$ theo quy tắc sau

$$\begin{aligned}
&C_k = \{z \in H : \langle z - y_k, v_k\rangle \le 0\},\\
&Q_k = \{z \in H : \langle z - x_k, x_0 - x_k\rangle \le 0\}.\\
&x_{k+1} = P_{C_k \cap Q_k}(x_0).
\end{aligned}$$

Các tác giả chứng minh được rằng nếu dãy các tham số hiệu chỉnh $\beta_k \ge c > 0$ thì dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới không điểm của toán tử A.

Cho C là tập con lồi đóng khác rỗng của không gian Hilbert thực H và $A_i : D(A_i) \subset C \to 2^H$ là các toán tử đơn điệu với $S = \bigcap_{i=1}^{N} A_i^{-1}(0) \neq \emptyset$ và $\overline{D(A_i)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA_i)$ với mọi $i = 1, 2, ..., N$. Bây giờ, áp dụng các kết quả mới của chúng tôi cho bài toán xác định không điểm chung của họ hữu hạn các toán tử A_i mà không cần giả thiết diam$(C) < \infty$. Định lí sau là hệ quả trực tiếp của các Định lí 1.8 và Định lí 1.9

Định lí 1.10. [56]

Cho $\{r_{i,k}\}$, $i = 1, 2, ..., N$ là dãy các số thực dương sao cho

$$\min_{i=1,2,...,N}\{\inf_k\{r_{i,k}\}\} = r > 0.$$

Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_k\}$ trong C xác định bởi (1.26)-(1.27) hoặc (1.28)-(1.29), với $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$ và $T_{i,k} = J^{A_i}_{r_{i,k}}$. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Tiếp theo, cho $A : C \to H$ là toán tử đơn điệu và h-liên tục. Ta xét ánh xạ T xác định bởi

$$T(x) = \begin{cases} A(x) + N_C(x) & \text{nếu } x \in C \\ \emptyset & \text{nếu } x \notin C \end{cases}$$

trong đó $N_C(x)$ là nón pháp tuyến của C tại $x \in H$. Rockafellar [47] đã chứng minh được rằng T là toán tử đơn điệu cực đại và $T^{-1}(0) = Sol(\text{VIP}(A, C))$.

Mặt khác, để ý rằng

$$z_k \in Sol(\text{VIP}(\gamma_k A + I - y_k), C)$$

nếu và chỉ nếu

$$\langle y - z_k, \gamma_k A z_k + z_k - y_k \rangle \ge 0 \qquad \forall y \in C,$$

Hay tương đương với $-\gamma_k A z_k - z_k + y_k \in \gamma_k N_C(z_k)$. Điều này suy ra $z_k = J^T_{\gamma_k} y_k$. Vì vậy, từ Định lí 1.10 ta nhận được kết quả dưới đây.

Định lí 1.11. [56]

Cho C_i, $i = 1, 2, ..., N$ là các tập con lồi đóng của không gian Hilbert thực H. Cho $A_i : C_i \to H$ là các toán tử đơn điệu và h-liên tục, $i = 1, 2, ..., N$ với $S = \bigcap_{i=1}^{N} Sol(\text{VIP}(A_i, C_i)) \neq \emptyset$. Với điểm ban đầu tùy ý $x_0 \in C$, xét dãy $\{x_k\}$ trong C xác định bởi (1.26)-(1.27) hoặc (1.28)-(1.29), với $0 \le \alpha_k \le \alpha < 1$, $T_{i,k}(x_k) = Sol(\text{VI}(\gamma_{i,n} A_i + I - x_k), C_i)$ và $\min_{i=1,2,...,N} \{\inf_k \{\gamma_{i,k}\}\} = r > 0$. Khi đó, dãy $\{x_k\}$ hội tụ mạnh tới $P_S(x_0)$.

Chương 2

Các phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm cho bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$

Trong chương này, chúng tôi đề xuất ba phương pháp lặp dạng hiện mới xấp xỉ nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân $\mathrm{VIP}^*(F, C)$.

2.1. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ $\tilde{S}_k$

2.1.1 Nội dung phương pháp

Phương pháp thứ nhất được thiết lập dựa trên việc sử dụng ánh xạ $\tilde{S}_k$. Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, chúng tôi xây dựng dãy $\{x_k\}$ theo lược đồ lặp hiện như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.1}$$

trong đó $\tilde{S}_k$ được xác định bởi

$$\tilde{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{s_i}{\tilde{s}_k} T^i \tag{2.2}$$

với

$$T^i = (1 - \alpha_i)I + \alpha_i T_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.3}$$

ở đây $\alpha_i \in (0, 1)$, T_i là các ánh xạ không giãn và I là ánh xạ đơn vị trên E. Các dãy tham số $\lambda_k \in (0, 1)$ và $\{s_i\}$ tương ứng thỏa mãn các điều kiện

$$\text{(L1)} \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0, \qquad \text{(L2)} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty,$$

và

$$s_i > 0, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{\infty} s_i = \tilde{s} < \infty. \tag{2.4}$$

2.1.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Trước khi trình bày chứng minh chi tiết cho sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.1) tới nghiệm duy nhất của bài toán $\mathrm{VIP}^*(F, C)$, chúng ta cần các bổ đề dưới đây.

Bổ đề 2.1. [60]

Giả sử $\{a_k\}$ là một dãy các số thực không âm sao cho

$$a_{k+1} \leq (1 - b_k)a_k + b_k c_k,$$

trong đó $\{b_k\}$ và $\{c_k\}$ là các dãy số thực thỏa mãn

i) $b_k \in [0, 1]$,

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$,

iii) $\displaystyle\limsup_{k\to\infty} c_k \leq 0$.

Khi đó, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Bổ đề 2.2. [52]

Cho $\{x_k\}$ và $\{z_k\}$ là các dãy bị chặn trong không gian Banach E sao cho

$$x_{k+1} = h_k x_k + (1 - h_k)z_k \quad \text{với mọi} \quad k \geq 1,$$

trong đó $\{h_k\}$ là dãy số thực thỏa mãn điều kiện

$$0 < \liminf_{k\to\infty} h_k \leq \limsup_{k\to\infty} h_k < 1.$$

Giả thiết rằng,

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\|\big) \leq 0.$$

Khi đó, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0$.

Bổ đề 2.3. [8]

Cho Q là tập con lồi đóng của không gian Banach lồi chặt E. Cho $\{T_i\}$ là dãy các ánh xạ không giãn trên Q với $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. *Giả sử $\{t_i\}$ là dãy các* *số thực dương với* $\sum_{i=1}^{\infty} t_i = 1$. *Khi ấy, ánh xạ* T *trên* Q *xác định bởi*

$$T(x) = \sum_{i=1}^{\infty} t_i T_i(x)$$

với $x \in Q$ *hoàn toàn được xác định. Hơn nữa,* T *là ánh xạ không giãn và* $\mathrm{Fix}(T) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i)$.

Bổ đề 2.4. [12]

Cho E *là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* j*-đơn điệu mạnh với hệ số* η *và* γ*-giả co chặt với* $\eta + \gamma > 1$. *Cho* T *là ánh xạ không giãn trên* E *với* $C := \mathrm{Fix}(T) \neq \emptyset$. *Với mỗi* $t \in (0, 1)$, *chọn* $\lambda_t \in (0, 1)$ *tùy ý sao cho* $\lambda_t \to 0$ *khi* $t \to 0$ *và định nghĩa lưới* $\{y_t\}$ *như sau*

$$y_t := (I - \lambda_t F)T(y_t). \tag{2.5}$$

Khi đó, lưới $\{y_t\}$ *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* $\mathrm{VIP}^*(F, C)$ *khi* $t \to 0$.

Bổ đề 2.5. [12]

Cho E *là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* j*-đơn điệu mạnh với hệ số* η *và* γ*-giả co chặt với* $\eta + \gamma > 1$. *Cho* $\tilde{S}_k$ *được xác định bởi* (2.2), (2.3) *và* (2.4). *Khi ấy, nếu dãy* $\{x_k\}$ *xác định bởi* (2.1) *bị chặn thì*

$$\limsup_{k\to\infty} \langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \leq 0. \tag{2.6}$$

trong đó x_* *là nghiệm duy nhất của bài toán* (1.2).

Sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.1) được phát biểu và chứng minh chi tiết trong định lí dưới đây.

Định lí 2.1. [12]

Cho E *là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* j*-đơn điệu mạnh với hệ số* η *và* γ*-giả co chặt* *với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0,1)$ và s_i tương ứng thỏa mãn các điều kiện* (L1), (L2) *và* (2.4). *Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (2.1) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

Chứng minh. Định lí sẽ được chứng minh thông qua một số bước như sau.
Bước 1. Chứng minh dãy $\{x_k\}$ bị chặn.
Từ (2.2) và Mệnh đề 1.17, với mọi $p \in C$ ta có ước lượng

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - p\| &= \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - p\| \\
&= \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - \tilde{S}_k(p)\| \\
&= \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(p) - \lambda_k F\tilde{S}_k(p)\| \\
&\leq \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(p)\| + \|\lambda_k F\tilde{S}_k(p)\| \\
&\leq (1 - \lambda_k\tau)\|\tilde{S}_k(x_k) - \tilde{S}_k(p)\| + \lambda_k\|F\tilde{S}_k(p)\| \\
&\leq (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F(p)\| \\
&= (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\tau\frac{1}{\tau}\|F(p)\| \\
&\leq \max\left\{\|x_1 - p\|, \frac{1}{\tau}\|F(p)\|\right\},
\end{aligned}$$

trong đó $\tilde{S}_k$ xác định bởi (2.2)-(2.4) và $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$. Do đó, dãy $\{x_k\}$ bị chặn.
Bước 2. Chứng minh $\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.
Vì $\{x_k\}$ bị chặn nên các dãy $\{\tilde{S}_k(x_k)\}$, $\{\tilde{S}_{k+1}(x_k)\}$, $\{F\tilde{S}_k(x_k)\}$, $\{F\tilde{S}_{k+1}(x_k)\}$, $\{T_1(x_k)\}$ và $\{T^i(x_k)\}$ với mọi $i \geq 1$ cũng bị chặn. Không mất tính tổng quát, ta giả sử các dãy này cùng bị chặn bởi một hằng số dương M_1. Hơn nữa, từ (2.2), (2.3) ta có thể viết lại x_{k+1} như sau

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \lambda_k(I - F)\tilde{S}_k(x_k) + (1 - \lambda_k)\tilde{S}_k(x_k), \\
&= \lambda_k(I - F)\tilde{S}_k(x_k) + (1 - \lambda_k)\left[\frac{s_1}{\tilde{s}_k}(1 - \alpha_1)x_k \right. \\
&\quad \left. + \frac{s_1\alpha_1}{\tilde{s}_k}T_1(x_k) + \frac{\tilde{s}_k - s_1}{\tilde{s}_k}\tilde{S}_{k,-1}(x_k)\right] \\
&= h_k x_k + (1 - h_k)z_k,
\end{aligned} \tag{2.7}$$

ở đây

$$\tilde{S}_{k,-1} = \frac{1}{\tilde{s}_k - s_1} \sum_{i=2}^{k} s_i T^i,$$
$$h_k = \frac{(1-\lambda_k)(1-\alpha_1)s_1}{\tilde{s_k}}$$

và $z_k = \dfrac{\lambda_k (I-F)\tilde{S}_k(x_k)}{1-h_k} + \dfrac{(1-\lambda_k)s_1\alpha_1 T_1(x_k)}{\tilde{s_k}(1-h_k)} + \dfrac{(1-\lambda_k)(\tilde{s}_k - s_1)\tilde{S}_{k,-1}(x_k)}{\tilde{s_k}(1-h_k)}$.
Vì $z_{k+1} - z_k = C_1 + s_1\alpha_1 C_2 + C_3$, trong đó

$$\begin{aligned}
C_1 :=& \frac{\lambda_{k+1}(I-F)\tilde{S}_{k+1}(x_{k+1})}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k (I-F)\tilde{S}_k(x_k)}{1-h_k} \\
=& \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)\tilde{S}_{k+1}(x_{k+1}) - (I-F)\tilde{S}_{k+1}(x_k)\big] \\
&+ \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)\tilde{S}_{k+1}(x_k) - (I-F)\tilde{S}_k(x_k)\big] \\
&+ \left[\frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k}\right](I-F)\tilde{S}_k(x_k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 :=& \frac{(1-\lambda_{k+1})T_1(x_{k+1})}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)T_1(x_k)}{\tilde{s_k}(1-h_k)} \\
=& \frac{1-\lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})}\big[T_1(x_{k+1}) - T_1(x_k)\big] \\
&+ \left[\frac{1-\lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{1-\lambda_k}{\tilde{s}_k(1-h_k)}\right]T_1(x_k),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 :=& \frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)\tilde{S}_{k+1,-1}(x_{k+1})}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)(\tilde{s}_k - 1)\tilde{S}_{k,-1}(x_k)}{\tilde{s}_k(1-h_k)} \\
=& \frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})}\big[\tilde{S}_{k+1,-1}(x_{k+1}) - \tilde{S}_{k+1,-1}(x_k)\big] \\
&+ \frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})}\big[\tilde{S}_{k+1,-1}(x_k) - \tilde{S}_{k,-1}(x_k)\big] \\
&+ \left[\frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)(\tilde{s}_k - s_1)}{\tilde{s}_k(1-h_k)}\right]\tilde{S}_{k,-1}(x_k),
\end{aligned}$$

và

$$\|\tilde{S}_{k+1,-1}(x_{k+1}) - \tilde{S}_{k,-1}(x_k)\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \frac{1}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} \sum_{k=2}^{k+1} s_i T^i(x_k) - \frac{1}{\tilde{s}_k - s_1} \sum_{k=2}^{k} s_i T^i(x_k) \right\| \\
&= \left\| \left(\frac{1}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} - \frac{1}{\tilde{s}_k - s_1} \right) \sum_{k=2}^{k} s_i T^i(x_k) + \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} T^{k+1}(x_k) \right\| \\
&\le \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} M_1 + \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} M_1 = \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1} - s_1} 2M_1,
\end{aligned}
$$

nên ta nhận được

$$
\begin{aligned}
\|z_{k+1} - z_k\| &\le \|C_1\| + s_1\alpha_1\|C_2\| + \|C_3\| \\
&\le \frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}} \left[\|x_{k+1} - x_k\| + 2M_1 \right] + \left| \frac{\lambda_{k+1}}{1 - h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1 - h_k} \right| 2M_1 \\
&\quad + s_1\alpha_1 \left[\frac{1 - \lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \|x_{k+1} - x_k\| \right. \\
&\quad \left. + \left| \frac{1 - \lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} - \frac{1 - \lambda_k}{\tilde{s}_k(1 - h_k)} \right| M_1 \right] \\
&\quad + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \|x_{k+1} - x_k\| + \frac{(1 - \lambda_{k+1}) s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} 2M_1 \\
&\quad + \left| \frac{(1 - \lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)(\tilde{s}_k - s_1)}{\tilde{s}_k(1 - h_k)} \right| M_1 \\
&\le \left[\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}} + \frac{(1 - \lambda_{k+1}) s_1 \alpha_1}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \right] \|x_{k+1} - x_k\| + c_k,
\end{aligned}
$$

trong đó $\tau_1 = \sqrt{(1 - \eta)/\gamma}$ và

$$
\begin{aligned}
c_k = M_1 \Bigg(& \frac{2\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}} + 2\left| \frac{\lambda_{k+1}}{1 - h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1 - h_k} \right| \\
& + s_1\alpha_1 \left| \frac{1 - \lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} - \frac{1 - \lambda_k}{\tilde{s}_k(1 - h_k)} \right| + \frac{2(1 - \lambda_{k+1}) s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \\
& + \left| \frac{(1 - \lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)(\tilde{s}_k - s_1)}{\tilde{s}_k(1 - h_k)} \right| \Bigg).
\end{aligned}
$$

Ta đặt

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_k := \Bigg[& \frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}} + \frac{(1 - \lambda_{k+1}) s_1 \alpha_1}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} \\
& + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1} - s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1 - h_{k+1})} - 1 \Bigg] \|x_{k+1} - x_k\| + c_k.
\end{aligned}
$$

Khi ấy, ta nhận được

$$\|z_{k+1} - z_k\| \le \|x_{k+1} - x_k\| + \tilde{c}_k.$$

Rõ ràng, từ các điều kiện (L1) và (2.4) ta có $h_k \to (1-\alpha_1)s_1/\tilde{s}$, $s_k \to 0$ và $\tilde{s}_k \to \tilde{s} > 0$ khi $k \to \infty$. Vì thế, ta có

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}&\left[\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + \frac{(1-\lambda_{k+1})s_1\alpha_1}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} + \frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1}-s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - 1\right]\\
&= \frac{s_1\alpha_1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})} + \frac{\tilde{s}-s_1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})} - 1 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} c_k = M_1 \lim_{k\to\infty}&\Bigg(\frac{2\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + 2\left|\frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k}\right|\\
&+ s_1\alpha_1\left|\frac{1-\lambda_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{1-\lambda_k}{\tilde{s}_k(1-h_k)}\right| + \frac{2(1-\lambda_{k+1})s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})}\\
&+ \left|\frac{(1-\lambda_{k+1})(\tilde{s}_{k+1}-s_1)}{\tilde{s}_{k+1}(1-h_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)(\tilde{s}_k-s_1)}{\tilde{s}_k(1-h_k)}\right|\Bigg)\\
= M_1\lim_{k\to\infty}&\Bigg(s_1\alpha_1\left|\frac{1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})} - \frac{1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})}\right|\\
&+ \left|\frac{\tilde{s}-s_1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})} - \frac{\tilde{s}-s_1}{\tilde{s}(1-(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s})}\right|\Bigg) = 0.
\end{aligned}$$

Từ các giới hạn trên và tính bị chặn của dãy $\{x_k\}$ đảm bảo rằng $\tilde{c}_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Vì vậy, ta có

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\|\big) \le 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2, ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k - z_k\| = 0. \tag{2.8}$$

Tiếp theo, từ (2.1), (2.7) và (2.8) dẫn đến $\|\tilde{S}_k(x_k) - x_{k+1}\| \le \lambda_k M_1 \to 0$ khi $k \to \infty$ và

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{k+1} - x_k\| = \lim_{k\to\infty}\big[1 - (1-\lambda_k)(1-\alpha_1)s_1/\tilde{s_k}\big]\|x_k - z_k\| = 0. \tag{2.9}$$

Bước 3. Chứng minh $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_*$.

Bây giờ, áp dụng Mệnh đề 1.7 và Mệnh đề 1.17 ta có ước lượng

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 = \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - x_*\|^2$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\tilde{S}_k(x_*) - \lambda_k F(x_*)\|^2 \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)\|\tilde{S}_k(x_k) - \tilde{S}_k(x_*)\|^2 - 2\lambda_k \langle F(x_*), j(x_{k+1} - x_*)\rangle \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - x_*\|^2 - 2\lambda_k \langle F(x_*), j(x_{k+1} - x_*)\rangle \\
&= (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - x_*\|^2 + 2\lambda_k [\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \\
&\quad + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle] \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - x_*\|^2 + 2\lambda_k \tau [\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \\
&\quad + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle]/\tau.
\end{aligned}
$$

Từ đó suy ra

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \le (1 - b_k)\|x_k - x_*\|^2 + b_k c_k,$$

trong đó

$$
\begin{aligned}
&b_k = \lambda_k \tau, \tau = 1 - \sqrt{(1 - \eta)/\gamma}, \\
&c_k = 2[\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle]/\tau.
\end{aligned}
$$

Vì $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k = \infty$ nên $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$. Do đó, áp dụng Bổ đề 2.1 cho $\{a_k\}$ với $a_k = \|x_k - x_*\|^2$, (2.6) và tính liên tục mạnh-yếu* của j cùng với (2.9) ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\|^2 = 0.$$

Định lí được chứng minh. □

Nhận xét 2.1. Phương pháp (2.1) dùng ánh xạ $\tilde{S}_k$ có cấu trúc đơn giản hơn các ánh xạ $\tilde{V}_k, W_k$ hay V_k và có thể tính toán song song được. Các phương pháp (1.7), (1.9), (1.10), (1.16), (1.17), (1.20) và (1.21), phương pháp (2.1) có sử dụng ba tham số lặp. Các tham số này đóng vai trò khác nhau, nó cho phép thực hiện những quy tắc riêng biệt trong thiết kế của mỗi thuật toán.

2.2. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ $\hat{S}_k$

2.2.1 Nội dung phương pháp

Phương pháp thứ hai được thiết lập dựa trên việc sử dụng ánh xạ $\hat{S}_k$. Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, chúng tôi xây dựng dãy lặp hiện $\{x_k\}$

như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.10}$$

ở đây ánh xạ $\hat{S}_k$ xác định bởi

$$\hat{S}_k = \frac{1}{s_0 - s_k} \sum_{i=1}^{k} (s_{i-1} - s_i) T^i \tag{2.11}$$

trong đó T^i được xác định bởi (2.3), $\lambda_k \in (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) và $\{s_i\}$ là dãy các số thực giảm ngặt, hội tụ về 0 khi $i \to \infty$.

2.2.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Bổ đề 2.6. [13]

Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\hat{S}_k$ xác định bởi (2.11). *Khi ấy, nếu dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (2.10) *bị chặn thì*

$$\limsup_{k \to \infty} \langle F(x_*), j(x_* - x_k) \rangle \leq 0 \tag{2.12}$$

ở đây x_* là nghiệm duy nhất của bài toán (1.2).

Sự hội tụ mạnh của phương pháp (2.10) được phát biểu và chứng minh chi tiết trong định lí dưới đây.

Định lí 2.2. [13]

Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Giả sử $\lambda_k \in (0, 1)$ thỏa mãn các điều kiện (L1), (L2) *và $\{s_i\}$ là dãy số thực dương giảm ngặt, hội tụ về* 0*. Khi ấy, dãy $\{x_k\}$ xác định bởi* (2.10) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất x_* của bài toán* (1.2) *khi $k \to \infty$.*

Chứng minh. Định lí sẽ được chứng minh thông qua một số bước như sau.

Bước 1. Chứng minh dãy $\{x_k\}$ bị chặn.

Trước hết, ta có $\hat{S}_k$ là ánh xạ không giãn trên E và $\mathrm{Fix}(T^i) = \mathrm{Fix}(T_i)$. Hiển nhiên, $\hat{S}_k(p) = p$ với với mọi $k \geq 1$ và với mọi $p \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \mathrm{Fix}(T_i)$.

Áp dụng Mệnh đề 1.17 chúng ta có ước lượng

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - p\| &= \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - p\| \\
&= \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - \hat{S}_k(p)\| \\
&= \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\hat{S}_k(p) - \lambda_k F\hat{S}_k(p)\| \\
&\leq \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\hat{S}_k(p)\| + \|\lambda_k F\hat{S}_k(p)\| \\
&\leq (1 - \lambda_k\tau)\|\hat{S}_k(x_k) - \hat{S}_k(p)\| + \lambda_k\|F\hat{S}_k(p)\| \\
&\leq (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F\hat{S}_k(p)\| \\
&= (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F(p)\| \\
&= (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\tau\frac{1}{\tau}\|F(p)\| \\
&\leq \max\left\{\|x_1 - p\|, \frac{1}{\tau}\|F(p)\|\right\}.
\end{aligned}$$

Điều này suy ra $\{x_k\}$ là dãy bị chặn.

Bước 2. Chứng minh $\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Vì $\{x_k\}$ bị chặn nên các dãy $\{\hat{S}_k(x_k)\}$, $\{\hat{S}_{k+1}(x_k)\}$, $\{F\hat{S}_k(x_k)\}$, $\{T_i(x_k)\}$, $\{T^i(x_k)\}$ với mọi $i \geq 1$, $\{\hat{S}_{k,-1}(x_k)\}$ và $\{\hat{S}_{k+1,-1}(x_k)\}$ cũng bị chặn, ở đây

$$\hat{S}_{k,-1} := \frac{1}{s_1 - s_k}\sum_{i=2}^{k}(s_{i-1} - s_i)T^i.$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử các dãy này cùng bị chặn bởi một hằng số dương M_1. Hơn nữa, từ (2.10), (2.11) ta có thể viết

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \lambda_k(I - F)\hat{S}_k(x_k) + (1 - \lambda_k)\hat{S}_k(x_k) \\
&= \lambda_k(I - F)\hat{S}_k(x_k) + (1 - \lambda_k)\bigg[\frac{(s_0 - s_1)(1 - \alpha_1)}{s_0 - s_k}x_k \\
&\quad + \frac{(s_0 - s_1)\alpha_1}{s_0 - s_k}T_1(x_k) + \frac{s_1 - s_k}{s_0 - s_k}\hat{S}_{k,-1}(x_k)\bigg] \\
&= h_k x_k + (1 - h_k)z_k
\end{aligned} \tag{2.13}$$

trong đó

$$h_k = \frac{(1 - \lambda_k)(s_0 - s_1)(1 - \alpha_1)}{s_0 - s_k},$$

$$z_k = \frac{\lambda_k (I-F)\hat{S}_k(x_k)}{1-h_k} + \frac{(1-\lambda_k)(s_0-s_1)\alpha_1}{(1-h_k)(s_0-s_k)} T_1(x_k)$$
$$+ \frac{(1-\lambda_k)(s_1-s_k)}{(1-h_k)(s_0-s_k)} \hat{S}_{k,-1}(x_k).$$

Vì $z_{k+1} - z_k = C_1 + (s_0 - s_1)\alpha_1 C_2 + C_3$, trong đó

$$C_1 := \frac{\lambda_{k+1}(I-F)\hat{S}_{k+1}(x_{k+1})}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k(I-F)\hat{S}_k(x_k)}{1-h_k}$$
$$= \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)\hat{S}_{k+1}(x_{k+1}) - (I-F)\hat{S}_{k+1}(x_k)\big]$$
$$+ \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)\hat{S}_{k+1}(x_k) - (I-F)\hat{S}_k(x_k)\big]$$
$$+ \left[\frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k}\right](I-F)\hat{S}_k(x_k),$$
$$C_2 := \frac{1-\lambda_{k+1}}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})} T_1(x_{k+1}) - \frac{1-\lambda_k}{(s_0-s_k)(1-h_k)} T_1(x_k)$$
$$= \frac{1-\lambda_{k+1}}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})}\big[T_1(x_{k+1}) - T_1(x_k)\big]$$
$$+ \left[\frac{(1-\lambda_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)}{(1-h_k)(s_0-s_k)}\right] T_1(x_k),$$
$$C_3 := \frac{(1-\lambda_{k+1})(s_1-s_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})}\hat{S}_{k+1,-1}(x_{k+1}) - \frac{(1-\lambda_k)(s_1-s_k)}{(1-h_k)(s_0-s_k)}\hat{S}_{k,-1}(x_k)$$
$$= \frac{(1-\lambda_{k+1})(s_1-s_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})}\big[\hat{S}_{k+1,-1}(x_{k+1}) - \hat{S}_{k+1,-1}(x_k)\big]$$
$$+ \frac{(1-\lambda_{k+1})(s_1-s_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})}\big[\hat{S}_{k+1,-1}(x_k) - \hat{S}_{k,-1}(x_k)\big]$$
$$+ \left[\frac{(1-\lambda_{k+1})(s_1-s_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0-s_{k+1})} - \frac{(1-\lambda_k)(s_1-s_k)}{(1-h_k)(s_0-s_k)}\right]\hat{S}_{k,-1}(x_k),$$

và

$$\|\hat{S}_{k+1,-1}(x_k) - \hat{S}_{k,-1}(x_k)\| = \Bigg\| \frac{1}{s_1 - s_{k+1}} \sum_{k=2}^{k+1} (s_{i-1} - s_i) T^i(x_k)$$
$$- \frac{1}{s_1 - s_k} \sum_{k=2}^{k} (s_{i-1} - s_i) T^i(x_k) \Bigg\|$$
$$= \left\| \left(\frac{1}{s_1 - s_{k+1}} - \frac{1}{s_1 - s_k} \right) \sum_{k=2}^{k} (s_{i-1} - s_i) T^i(x_k) + \frac{s_k - s_{k+1}}{s_1 - s_{k+1}} T^{k+1}(x_k) \right\|$$

$$\leq \left|\frac{-s_k + s_{k+1}}{(s_1 - s_{k+1})(s_1 - s_k)}\right|(s_1 - s_k)M_1 + \frac{s_k - s_{k+1}}{s_1 - s_{k+1}}M_1 = \frac{2M_1(s_k - s_{k+1})}{(s_1 - s_{k+1})},$$

nên suy ra

$$\begin{aligned}
\|z_{k+1} - z_k\| \leq \|C_1\| &+ (s_0 - s_1)\alpha_1\|C_2\| + \|C_3\| \\
&\leq \frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}}\left[\|x_{k+1} - x_k\| + \frac{4M_1}{\tau_1}\right] \\
&\quad + \left|\frac{\lambda_{k+1}}{1 - h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1 - h_k}\right| 2M_1 \\
&\quad + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_0 - s_1)\alpha_1}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})}\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\quad + (s_0 - s_1)\alpha_1\left|\frac{(1 - \lambda_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)}{(1 - h_k)(s_0 - s_k)}\right| M_1 \\
&\quad + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})}\|x_{k+1} - x_k\| \\
&\quad + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})2M_1(s_k - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})(s_1 - s_{k+1})} \\
&\quad + \left|\frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)(s_1 - s_k)}{(1 - h_k)(s_0 - s_k)}\right| M_1,
\end{aligned}$$

trong đó $\tau_1 = \sqrt{(1 - \eta)/\gamma}$. Do đó, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\| \leq \Bigg[&\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1 - h_{k+1}} + \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_0 - s_1)\alpha_1}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} \\
&+ \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - 1\Bigg]\|x_{k+1} - x_k\| + c_k
\end{aligned} \tag{2.14}$$

với

$$\begin{aligned}
c_k = \frac{4M_1\lambda_{k+1}}{1 - h_{k+1}} &+ \left|\frac{\lambda_{k+1}}{1 - h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1 - h_k}\right| 2M_1 \\
&+ (s_0 - s_1)\alpha_1\left|\frac{(1 - \lambda_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)}{(1 - h_k)(s_0 - s_k)}\right| M_1 \\
&+ \frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})2M_1(s_k - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})(s_1 - s_{k+1})} \\
&+ \left|\frac{(1 - \lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})}{(1 - h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - \frac{(1 - \lambda_k)(s_1 - s_k)}{(1 - h_k)(s_0 - s_k)}\right| M_1.
\end{aligned}$$

Để ý rằng, $s_k \to 0$, $1 - h_k \to [s_0 - (s_0 - s_1)(1 - \alpha_1)]/s_0$ khi $k \to \infty$ và từ điều kiện (L1) ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} c_k = (s_0 - s_1)\alpha_1 \left| \frac{1}{s_0 - (s_0 - s_1)(1-\alpha_1)} - \frac{1}{s_0 - (s_0 - s_1)(1-\alpha_1)} \right| M_1 + \left| \frac{s_1}{s_0 - (s_0 - s_1)(1-\alpha_1)} - \frac{s_1}{s_0 - (s_0 - s_1)(1-\alpha_1)} \right| M_1 = 0.$$

Hơn nữa,

$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{(1-\lambda_{k+1})(s_0 - s_1)\alpha_1}{(1-h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} + \frac{(1-\lambda_{k+1})(s_1 - s_{k+1})}{(1-h_{k+1})(s_0 - s_{k+1})} - 1 \right] = = \frac{(s_0 - s_1)\alpha_1 + s_1}{s_0 - (s_0 - s_1)(1-\alpha_1)} - 1 = 0.$$

Từ hai giới hạn trên, sử dụng tính bị chặn của dãy $\{x_k\}$ và (2.14) ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\| \big) \leq 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2, suy ra

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0.$$

Kết hợp điều này với (2.13) dẫn đến

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| &= \lim_{k\to\infty} (1-h_k) \|x_{k+1} - x_k\| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left[1 - \frac{(1-\lambda_k)(s_0 - s_1)(1-\alpha_1)}{s_0 - s_k} \right] \|x_k - z_k\| = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Bước 3. Chứng minh $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$.
Bây giờ, áp dụng Mệnh đề 1.7 và Mệnh đề 1.17 ta có ước lượng

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|^2 &= \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - x_*\|^2 \\ &= \|(I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_k) - (I - \lambda_k F)\hat{S}_k(x_*) - \lambda_k F(x_*)\|^2 \\ &\leq (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - p^*\|^2 - 2\lambda_k \langle F(x_*), j(x_{k+1} - x_*) \rangle \\ &= (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - p^*\|^2 + 2\lambda_k [\langle F(x_*), j(x_* - x_k) \rangle \\ &\quad + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k) \rangle]. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq (1 - b_k)\|x_k - x_*\|^2 + b_k c_k,$$

trong đó

$$b_k = \lambda_k \tau, \tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma},$$
$$c_k = 2[\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle]/\tau.$$

Vì $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$ nên $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tau = \infty$. Do đó, áp dụng Bổ đề 2.1 cho $a_k = \|x_k - x_*\|^2$, kết hợp với (2.12), tính liên tục mạnh-yếu* của j và (2.15) ta nhận được $\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\|^2 = 0$. Định lí được chứng minh. □

2.3. Phương pháp lai ghép đường dốc nhất dùng ánh xạ S^k

2.3.1 Nội dung phương pháp

Xuất phát từ điểm x_1 tùy ý thuộc E, dãy lặp hiện $\{x_k\}$ được thiết kế như sau:

$$x_{k+1} = (I - \lambda_k F)S^k(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.16}$$

trong đó

$$S^k = \alpha I + (1-\alpha)T^k \quad \text{với} \quad T^k = \sum_{i=1}^{k} (s_i/\tilde{s}_k)T_i.$$

và $\alpha \in (0,1)$ là một số thực cố định, s_i được xác định bởi (2.4), $\tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$ và dãy tham số λ_k thỏa mãn các điều kiện (L1) và (L2).

2.3.2 Sự hội tụ mạnh của phương pháp

Trước hết, chúng ta có bổ đề quan trọng sau.

Bổ đề 2.7. [26]

Cho E là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho $F : E \to E$ là ánh xạ j-đơn điệu mạnh với hệ số η và γ-giả co chặt với $\eta + \gamma > 1$. Cho $\{T_i\}$ là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên E với $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. Ta định nghĩa ánh xạ

$$T^k := \frac{1}{\tilde{s}_k} \sum_{i=1}^{k} s_i T_i, \ k \geq 1$$

trong đó s_i *được xác định bởi* (2.4) *và* $\tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{k} s_i$. *Khi đó,*

i) Tồn tại ánh xạ không giãn $T : E \to E$ *xác định bởi*

$$T(x) = \lim_{k\to\infty} T^k(x) = \frac{1}{\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} s_i T_i(x), \quad x \in E$$

và $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T^i) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) = \mathrm{Fix}(T)$.

ii) Với mọi tập con bị chặn B *trong* E, *ta có* $\lim_{k\to\infty} \sup_{x\in B} \|T^k(x) - T(x)\| = 0$.

iii) Với mỗi số thực cố định $\alpha \in (0, 1)$ *ta xác định ánh xạ*

$$S := \alpha I + (1 - \alpha)T.$$

Nếu dãy $\{x_k\}$ *trong* E *là bị chặn và* $\lim_{k\to\infty} \|x_k - S(x_k)\| = 0$ *thì*

$$\limsup_{k\to\infty} \langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \le 0, \tag{2.17}$$

ở đây x_* *là nghiệm duy nhất của bài toán* (1.2).

Định lí 2.3. [26]

Cho E *là không gian Banach phản xạ thực, lồi chặt có chuẩn khả vi Gâteaux đều. Cho* $F : E \to E$ *là ánh xạ* j*-đơn điệu mạnh với hệ số* η *và* γ*-giả co chặt với* $\eta + \gamma > 1$. *Cho* $\{T_i\}$ *là họ vô hạn các ánh xạ không giãn trên* E *với* $C := \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathrm{Fix}(T_i) \neq \emptyset$. *Lấy một giá trị cố định* $\alpha \in (0, 1)$. *Giả sử* λ_k *và* s_i *tương ứng thỏa mãn các điều kiện* (L1), (L2) *và* (2.4). *Khi ấy, dãy* $\{x_k\}$ *xác định bởi* (2.16) *hội tụ mạnh tới nghiệm duy nhất* x_* *của bài toán* (1.2) *khi* $k \to \infty$.

Chứng minh. Định lí sẽ được chứng minh thông qua một số bước như sau.
Bước 1. Chứng minh dãy $\{x_k\}$ bị chặn.
Với mọi $p \in C$, từ (2.16) và Mệnh đề 1.17 ta có ước lượng

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - p\| &\le \|(I - \lambda_k F)S^k(x_k) - S^k(p)\| \\ &\le (1 - \lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \|(I - \lambda_k F)S^k(p) - S^k(p)\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\|F(p)\| \\
&= (1-\lambda_k\tau)\|x_k - p\| + \lambda_k\tau\|F(p)\|/\tau \\
&\leq \max\{\|x_1 - p\|, \|F(p)\|/\tau\},
\end{aligned}
$$

trong đó $S^k = \alpha I + (1-\alpha)T^k$ với T^k được định nghĩa trong Bổ đề 2.7 và $\tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$. Do đó, dãy $\{x_k\}$ là bị chặn.

Bước 2. Chứng minh $\|x_{k+1} - x_k\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Vì dãy $\{x_k\}$ nên các dãy $\{S^k(x_k)\}$, $\{S^{k+1}(x_k)\}$, $\{T_i(x_k)\}$ với $i \geq 1$, $\{FS^k(x_k)\}$ và $\{FS^{k+1}(x_k)\}$ cũng bị chặn. Không mất tính tổng quát ta giả sử các dãy này cùng bị chặn bởi một hằng số dương M_1. Thêm vào đó, từ (2.16), ta có thể viết

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \lambda_k(I-F)S^k(x_k) + (1-\lambda_k)S^k(x_k) \\
&= \lambda_k(I-F)S^k(x_k) + (1-\lambda_k)\big(\alpha x_k + (1-\alpha)T^k(x_k)\big) \\
&= h_k x_k + (1-h_k)z_k,
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

trong đó $h_k = (1-\lambda_k)\alpha$ và

$$
z_k = \frac{\lambda_k(I-F)S^k(x_k)}{1-h_k} + \frac{(1-\lambda_k)(1-\alpha)T^k(x_k)}{1-h_k}.
$$

Vì $z_{k+1} - z_k = C_1 + (1-\alpha)C_2$, trong đó

$$
\begin{aligned}
C_1 :&= \frac{\lambda_{k+1}(I-F)S^{k+1}(x_{k+1})}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k(I-F)S^k(x_k)}{1-h_k} \\
&= \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)S^{k+1}(x_{k+1}) - (I-F)S^{k+1}(x_k)\big] \\
&\quad + \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[(I-F)S^{k+1}(x_k) - (I-F)S^k(x_k)\big] \\
&\quad + \left[\frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k}\right](I-F)S^k(x_k),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 :&= \frac{(1-\lambda_{k+1})T^{k+1}(x_{k+1})}{1-h_{k+1}} - \frac{(1-\lambda_k)T^k(x_k)}{1-h_k} \\
&= \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[T^{k+1}(x_{k+1}) - T^{k+1}(x_k)\big] \\
&\quad + \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}}\big[T^{k+1}(x_k) - T^k(x_k)\big] \\
&\quad + \left[\frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{1-h_k}\right]T^k(x_k).
\end{aligned}
$$

và ta có đánh giá sau

$$\begin{aligned}\|T^{k+1}(x_k) - T^k(x_k)\| &= \left\| \frac{1}{\tilde{s}_{k+1}} \sum_{i=1}^{k+1} s_i T_i(x_k) - \frac{1}{\tilde{s}_k} \sum_{i=1}^{k} s_i T_i(x_k) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{1}{\tilde{s}_{k+1}} - \frac{1}{\tilde{s}_k} \right) \sum_{i=1}^{k} s_i T_i(x_k) + \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} T_{k+1}(x^k) \right\| \\ &\leq \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} M_1 + \frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} M_1 = 2\frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} M_1,\end{aligned}$$

nên ta có

$$\begin{aligned}\|z_{k+1} - z_k\| &\leq \|C_1\| + \|C_2\|(1-\alpha) \\ &\leq \frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} \left[\|x_{k+1} - x_k\| + 2M_1 \right] + \left| \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k} \right| 2M_1 \\ &\quad + \frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} \left[\|x_{k+1} - x_k\| + 2\frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} M_1 \right] \\ &\quad + \left| \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{1-h_k} \right| M_1(1-\alpha) \\ &\leq \left[\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + \frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} \right] \|x_{k+1} - x_k\| + c_k,\end{aligned}$$

ở đây $\tau_1 = \sqrt{(1-\eta)/\gamma}$ và

$$\begin{aligned}c_k = M_1 \Bigg(& 2\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + 2\left| \frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k} \right| \\ & + 2\frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}} \frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} + \left| \frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{1-h_k} \right| (1-\alpha) \Bigg).\end{aligned}$$

Ta đặt $\tilde{c}_k := \left[\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + \frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} - 1 \right] \|x_{k+1} - x_k\| + c_k$. Khi đó, ta nhận được

$$\|z_{k+1} - z_k\| \leq \|x_{k+1} - x_k\| + \tilde{c}_k.$$

Hiển nhiên, từ các điều kiện (L1) và (2.4) ta có $h_k \to \alpha$, $s_k \to 0$ và $\tilde{s}_k \to \tilde{s} > 0$ khi $k \to \infty$. Do đó

$$\lim_{k\to\infty} \left[\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + \frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} - 1 \right] = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} - 1 = 0$$

và

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} c_k &= M_1 \lim_{k\to\infty}\Big(2\frac{\lambda_{k+1}\tau_1}{1-h_{k+1}} + 2\Big|\frac{\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{\lambda_k}{1-h_k}\Big| \\ &\qquad + 2\frac{s_{k+1}}{\tilde{s}_{k+1}}\frac{(1-\lambda_{k+1})(1-\alpha)}{1-h_{k+1}} + \Big|\frac{1-\lambda_{k+1}}{1-h_{k+1}} - \frac{1-\lambda_k}{1-h_k}\Big|(1-\alpha)\Big) \\ &= M_1\Big|\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\Big|(1-\alpha) = 0.\end{aligned}$$

Các giới hạn trên cùng với tính bị chặn của $\{x_k\}$ dẫn đến $\tilde{c}_k \to 0$ khi $k \to \infty$. Do đó, ta nhận được

$$\limsup_{k\to\infty}\big(\|z_{k+1} - z_k\| - \|x_{k+1} - x_k\|\big) \le 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.2, ta có

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - z_k\| = 0. \tag{2.19}$$

Tiếp theo, từ (2.16) và (2.18) dẫn đến $\|S^k(x_k) - x_{k+1}\| \le \lambda_k M_1 \to 0$, khi $k \to \infty$ và

$$\lim_{k\to\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = \lim_{k\to\infty}\big(1 - (1-\lambda_k)\alpha\big)\|x_k - z_k\| = 0.$$

Bước 3. Chứng minh $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$.

Theo Bổ đề 2.4 tồn tại duy nhất nghiệm $x_* \in C$ của bài toán (1.2). Vì $B := \{x_k\}$ xác định bởi (2.16) bị chặn nên áp dụng ii) của Bổ đề 2.7 cho ta $\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in B}\|T^k(x) - T(x)\| = 0$ và vì vậy $\lim_{k\to\infty}\sup_{x\in B}\|S^k(x) - S(x)\| = 0$. Mặt khác, từ ước lượng

$$\begin{aligned}\|x_k - S(x_k)\| &\le \|x_k - S^k(x_k)\| + \|S^k(x_k) - S(x_k)\| \\ &\le \|x_k - S^k(x_k)\| + \sup_{x\in B}\|S^k(x) - S(x)\|.\end{aligned}$$

và từ Bước 2 suy ra $\lim_{k\to\infty}\|x_k - S^k(x_k)\| = 0$. Vì thế, ta có $\|x_k - S(x_k)\| \to 0$ khi $k \to \infty$. Bây giờ, áp dụng iii) của Bổ đề 2.7 ta nhận được

$$\limsup_{k\to\infty}\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \le 0.$$

Vì j liên tục đều trên các tập con bị chặn của E nên

$$\lim_{k\to\infty}\big(j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\big) = 0. \tag{2.20}$$

Tiếp theo, áp dụng Mệnh đề 1.7 và Mệnh đề 1.17 ta có

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x_*\|^2 &= \|(I - \lambda_k F)S^k(x_k) - x_*\|^2 \\
&= \|(I - \lambda_k F)S^k(x_k) - (I - \lambda_k F)S^k(x_*) - \lambda_k F(x_*)\|^2 \\
&\le \|(I - \lambda_k F)S^k(x_k) - (I - \lambda_k F)S^k(x_*)\|^2 \\
&\quad + 2\langle -\lambda_k F(x_*), j(x_{k+1} - x_*)\rangle \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)^2 \|S^k(x_k) - S^k(x_*)\|^2 - 2\lambda_k \langle F(x_*), j(x_{k+1} - x_*)\rangle \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - x_*\|^2 - 2\lambda_k \langle F(x_*), j(x_{k+1} - x_*)\rangle \\
&\le (1 - \lambda_k \tau)\|x_k - x_*\|^2 + 2\lambda_k \tau \big[\langle F(x_*), j(x_* - x_k)\rangle \\
&\quad + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle\big]/\tau.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \le (1 - b_k)\|x_k - x_*\|^2 + b_k c_k, \tag{2.21}$$

trong đó

$$\begin{aligned}
&b_k = \lambda_k \tau, \tau = 1 - \sqrt{(1-\eta)/\gamma}, \\
&c_k = 2\big[\langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1})\rangle + \langle F(x_*), j(x_* - x_{k+1}) - j(x_* - x_k)\rangle\big]/\tau.
\end{aligned}$$

Vì $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k = \infty$ nên $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \tau = \infty$. Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 2.1 cho $a_k = \|x_k - x_*\|^2$, sử dụng (2.20) và (2.21) ta được $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$. □

2.4. Ứng dụng và kết quả tính toán số

Các phương pháp lặp dạng hiện mới của chúng tôi có thể áp dụng để tìm nghiệm của bài toán cực trị (Mệnh đề 5.1 và Mệnh đề 5.2, trang 15-16, [34]): Tìm $x_* \in C$ sao cho

$$\varphi(x_*) = \min_{x\in C} \varphi(x), \quad C := \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \tag{2.22}$$

trong đó φ là phiếm hàm lồi, có đạo hàm $\varphi'(x)$ liên tục Lipschitz, đơn điệu mạnh trên không gian $\mathbb{R}^n$ và C_i là các tập con lồi đóng của $\mathbb{R}^n$.

Chúng tôi xét bài toán (2.22) với miền ràng buộc C được xác định trong hai trường hợp sau: C là giao của các nửa không gian đóng

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \cdots + a_n^i x_n \le b_i\}, \tag{2.23}$$

trong đó $a_j^i, b_i \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le n)$ hoặc C là giao của các hình cầu đóng

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j^i)^2 \le r_i^2\}, \quad r_i > 0. \tag{2.24}$$

ở đây $a_j^i \in \mathbb{R}$ $(1 \le j \le n)$.

Ví dụ 2.1. Xét bài toán (2.22)-(2.23) trong trường hợp $n = 2$.

Hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ có dạng

$$\varphi(x) := \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{với } x = (x_1, x_2).$$

Các tập C_i được cho bởi

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \le b_i\},$$

với $a_1^i = 1/i, a_2^i = -1$ và $b_i = 0$ với mọi $i \ge 1$. Trong trường hợp này, dễ thấy $x_* = (0;0)$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Mặt khác, để ý rằng điều kiện tối ưu cho bài toán (2.22) là bất đẳng thức biến phân

$$\langle \nabla\varphi(x_*), y - x_* \rangle \ge 0 \quad \forall y \in C.$$

Áp dụng phương pháp (2.1) cho ví dụ này với $F(x) = \nabla\varphi(x)$ và $T_i = P_{C_i}$. Chọn điểm ban đầu là $x_1 = (2.0; -3.0)$. Chọn các tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ trong Định lí 2.1 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \quad s_i = \alpha_i = \frac{1}{i(i+1)}.$$

Sau 100 bước lặp ta nhận được bảng kết quả:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	40	-0.000591766	-0.000346015
10	-0.007511824	-0.008298578	80	-0.000155006	-0.000069241
20	-0.002159906	-0.001752941	90	-0.000123185	-0.000052541
30	-0.001017548	-0.000682130	100	-0.000100272	-0.000040995

Bảng 2.1: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.1)

Tiếp theo, chúng tôi áp dụng phương pháp (1.9) của Iemoto và cộng sự cho cùng bài toán trên. Ta chọn các tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.3 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \alpha_i = \frac{1}{100} + \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{và} \quad \rho = \frac{1}{20}.$$

Kết quả tính toán đối với phương pháp (1.9) với cùng điểm ban đầu và số bước lặp như sau:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	40	-0.358377585	-0.187650539
10	-0.349870114	-0.338431889	80	-0.340420244	-0.158749714
20	-0.364418302	-0.241939296	90	-0.337561929	-0.153651335
30	-0.363749444	-0.204236841	100	-0.335041279	-0.149090066

Bảng 2.2: Kết quả tính toán cho phương pháp (1.9) với $\rho = 1/20$

Bây giờ, sử dụng phương pháp (1.10) của Yao và cộng sự. Các tham số được chọn thỏa mãn Định lí 1.4 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \quad \alpha_i = \frac{1}{100} + \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{và} \quad \gamma_k = \frac{1}{100}.$$

Bảng kết quả tính toán cho phương pháp (1.10) với cùng điểm ban đầu và số bước lặp sẽ là:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	40	0.001919447	-0.003075765
10	0.034425457	-0.052395025	80	0.000375849	-0.000654537
20	0.008482904	-0.013122376	90	0.000278279	-0.000496335
30	0.003602190	-0.005668681	100	0.000210945	-0.000385873

Bảng 2.3: Kết quả tính toán cho phương pháp (1.10) với $\gamma_k = 1/100$

Bảng tương quan về sai số tính toán so với nghiệm chính xác của các phương pháp (2.1), phương pháp (1.9) và phương pháp (1.10).

Phương pháp	k	$\|x_k - x_*\|$	Thời gian (giây)
(1.9) (với $\rho = 1/20$)	100	3.6671×10^{-1}	0.0460
(1.10) (với $\gamma_k = 1/100$)	100	4.3976×10^{-4}	0.0620
(2.1)	100	1.0833×10^{-4}	0.0310

Rõ ràng, ở ví dụ trên, phương pháp (2.1) của chúng tôi đề xuất có tốc độ hội tụ nhanh hơn và cần ít thời gian tính toán hơn các phương pháp (1.9) và phương pháp (1.10).

Ví dụ 2.2. Xét bài toán (2.22)-(2.24) trong trường hợp $n = 2$. Hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$\varphi(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad \text{với } x = (x_1, x_2).$$

Các tập C_i được cho bởi

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1^i)^2 + (x_2 - a_2^i)^2 \leq r_i^2\}$$

với $r_i = 1$, $a_1^i = 1 + 1/i$ và $a_2^i = 0$ với mọi $i \geq 1$. Trong trường hợp này, ta có $x_* = (1.5; \sqrt{0.75})$ là nghiệm duy nhất của bài toán.

Áp dụng phương pháp (2.1) cho ví dụ này với $F(x) = \nabla\varphi(x)$, trong đó $\nabla\varphi(x) = (2x_1 - 2; 2x_2 - 4)$ và $T_i = P_{C_i}$. Chọn điểm ban đầu là $x_1 = (3.0; 3.0)$. Chọn dãy các tham số thỏa mãn điều kiện Định lí 2.1 như trong Ví dụ 2.1. Áp dụng phương pháp (2.1), kết quả tính toán ở bước lặp 46000 ta nhận được nghiệm xấp xỉ là $(1.54118986; 0.88877202)$. Trong khi đó, cùng bước lặp như trên, nếu áp dụng phương pháp (1.9) với $\rho = 1/3$ thì nghiệm xấp xỉ là $(1.552771131; 0.894458825)$, nếu sử dụng phương pháp (1.10) với $\gamma_k = 1/100$ thì ta nhận được nghiệm xấp xỉ là $(1.548117716; 0.903764265)$.

Bảng tương quan về sai số tính toán so với nghiệm chính xác của các phương pháp (2.1), phương pháp (1.9) và (1.10) trong ví dụ này là:

Phương pháp	k	$\|x_k - x_*\|$	Thời gian (giây)
(1.9) (với $\rho = 1/3$)	46000	$5994. \times 10^{-2}$	3756.7200
(1.10) (với $\gamma_k = 1/100$)	46000	6.1152×10^{-2}	4017.8200
(2.1)	46000	4.7053×10^{-2}	882.7740

Nhận xét 2.2. Như vậy, chúng ta cũng thấy phương pháp (2.1) có tốc độ hội tụ nhanh hơn và cần ít thời gian tính toán hơn các phương pháp (1.9) và (1.10) trong ví dụ này.

Ví dụ 2.3. Ta xét bài toán (2.22)-(2.23) trong trường hợp $n = 2$ và hàm mục tiêu $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$\varphi(x) = x^T A x + b^T x + c \quad \text{với } x = (x_1, x_2).$$

trong đó

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad c = 13.$$

Các tập C_i được cho bởi

$$C_i = \{x \in \mathbb{R}^2 : a_1^i x_1 + a_2^i x_2 \geq b_i\},$$

với $a_1^i = 1$, $a_2^i = i$ và $b_i = 2$ với mọi $i \geq 1$. Trong trường hợp này $x_* = (2.0; 3.0)$ là nghiệm duy nhất của bài toán. Áp dụng phương pháp (2.10) cho ví dụ này với $F(x) = \nabla\varphi(x)$, trong đó $\nabla\varphi(x) = (2x_1 - 4; 2x_2 - 6)$ và $T_i = P_{C_i}$. Chọn điểm ban đầu $x^1 = (-3.0; -3.0)$ và dãy các tham số thỏa mãn điều kiện hội tụ trong Định lí 2.2 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \quad s_i = \frac{1}{(i+1)(i+2)} \text{ với } i \geq 0, \quad \alpha_i = \frac{1}{i(i+1)} \text{ với } i \geq 1.$$

Sau 1000 vòng lặp, ta có bảng kết quả tính toán:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	-3.00000000	-3.000000000	40	1.985077236	2.981455284
10	1.777515152	2.723515152	100	1.997576897	2.996988779
20	1.941730159	2.927587302	500	1.999902302	2.999878589
30	1.973684588	2.967297491	1000	1.999975551	2.999969617

Bảng 2.4: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.10)

Nếu sử dụng phương pháp (1.9) với cùng điểm xuất phát và chọn các tham số lặp thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.3 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \alpha_i = \frac{1}{100} + \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{và} \quad \rho = \frac{1}{20}.$$

thì kết quả tính toán đối với phương pháp này ở bước lặp thứ 1000 sẽ là $x_{1000} = (-0.003777417; 0.004757678)$. Nghiệm này còn sai số rất lớn so với nghiệm chính xác của bài toán. Nếu sử dụng (1.10) với cùng điểm xuất phát và chọn các tham số lặp thỏa mãn điều kiện hội tụ của Định lí 1.4 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \alpha_i = \frac{1}{100} + \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{và} \quad \gamma_k = \frac{1}{2}.$$

thì kết quả ở cùng số bước lặp là $x_{1000} = (1.999988011; 2.999986013)$. Nếu sử dụng phương pháp (2.1) với cùng điểm xuất phát và các tham số lặp được chọn tương tự như phương pháp (2.10) thì kết quả ở cùng số bước lặp là $x_{1000} = (1.999993006; 2.999991008)$.

Bảng tương quan về sai số tính toán so với nghiệm chính xác của các phương pháp trong ví dụ này là:

Phương pháp	k	$\|x_k - x_*\|$	Thời gian (giây)
(1.9)	1000	3.603692620	1.9410
(1.10)	1000	1.8420×10^{-5}	1.7510
(2.1)	1000	1.1390×10^{-5}	0.794
(2.10)	1000	3.8998×10^{-5}	0.833

Trong ví dụ này, ta cũng thấy tốc độ hội tụ và thời gian tính toán của phương pháp (2.1) và (2.10) nhanh hơn các phương pháp (1.9) và (1.10).

Ví dụ 2.4. Sử dụng phương pháp (2.16) của chúng tôi cho bài toán (2.22)-(2.23) với các giả thiết tương tự như trong Ví dụ 2.1. Với cùng điểm ban đầu $x_1 = (2.0; -3.0)$, chọn $\alpha = 0.5$ và giá trị của các tham số lặp khác được chọn giống như phương pháp (2.1) ở Ví dụ 2.1 là

$$\lambda_k = \frac{1}{k+2}, \quad s_i = \frac{1}{i(i+1)}$$

thì sau 100 bước lặp chúng tôi nhận được kết quả như dưới đây:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$
1	2.000000000	-3.000000000	40	-0.000480994	-0.000070587
10	-0.006652559	-0.004186461	80	-0.000122169	-0.000008939
20	-0.001851317	-0.000549394	90	-0.000096686	-0.000006287
30	-0.000845059	-0.000165788	100	-0.000078416	-0.000004588

Bảng 2.5: Kết quả tính toán cho phương pháp (2.16)

Bảng tương quan về sai số tính toán so với nghiệm chính xác của các phương pháp (2.1) và phương pháp (2.16) trong ví dụ này là:

Phương pháp	k	$\|x_k - x_*\|$	Thời gian (giây)
(2.1)	100	1.0833×10^{-5}	0.0310
(2.16)	100	1.5868×10^{-6}	0.0160

Tiếp theo, sử dụng phương pháp (2.16) đối với bài toán (2.22)-(2.24) với các giả thiết tương tự như trong Ví dụ 2.2. Khi đó, với cùng điểm ban đầu

$x_1 = (3.0; 3.0)$, chọn $\alpha = 0.5$ và giá trị của các tham số lặp khác được chọn giống như ở trên thì tại bước lặp 45000 nghiệm xấp xỉ của bài toán là $(1.5034141156; 0.8682249753)$.

Bảng tương quan về sai số tính toán so với nghiệm chính xác của các phương pháp (2.1) và phương pháp (2.16) trong trường hợp này là:

Phương pháp	k	$\|x_k - x_*\|$	Thời gian (giây)
(2.1)	46000	4.7053×10^{-2}	882.7740
(2.16)	45000	5.5053×10^{-5}	864.9910

Nhận xét 2.3. Chúng ta có thể thấy phương pháp (2.16) có tốc độ hội tụ nhanh hơn phương pháp (2.1) và tốn ít thời gian tính toán hơn phương pháp (2.1) trong ví dụ này. Bên cạnh đó, nó thể hiện tính vượt trội hơn các phương pháp trong các ví dụ đã được trình bày ở trên.

KẾT LUẬN VÀ ĐỀ NGHỊ

Đề tài đã nghiên cứu và đề xuất các phương pháp lặp xấp xỉ nghiệm cho lớp bài toán bất đẳng thức biến phân.

Đề tài của chúng tôi đã đạt được các kết quả sau:

- Đề xuất được hai phương pháp chiếu lai ghép là phương pháp (1.26), (1.27) và hai phương pháp chiếu co hẹp (1.28) và (1.29) để tìm điểm bất động chung của một họ hữu hạn các ánh xạ gần không giãn trên không gian Hilbert thực. Đồng thời áp dụng phương pháp mới xấp xỉ nghiệm cho bài toán hệ bất đẳng thức biến phân với toán tử đơn điệu.
- Đề xuất được bốn phương pháp lặp dạng hiện mới là phương pháp (1.13), phương pháp (2.1), phương pháp (2.10) và phương pháp (2.16) để xấp xỉ nghiệm cho một lớp bài toán bất đẳng thức biến phân trên không gian Banach với toán tử j-đơn điệu.
- Các phương pháp mới của chúng tôi có thể áp dụng cho bài toán tìm điểm bất động chung của họ vô hạn đếm được các ánh xạ không giãn hoặc tìm không điểm chung của một họ vô hạn đếm được các ánh xạ j-đơn điệu cực đại.
- Xây dựng được bốn ví dụ số đơn giản minh họa cho các thuật toán mới đề xuất và có tương quan với một số phương pháp (Ví dụ 2.1-Ví dụ 2.4).

Kiến nghị hướng nghiên cứu tiếp theo của đề tài:

(I) Nghiên cứu các tiêu chuẩn dừng của các phương pháp lặp đã đề xuất từ đó có thêm cơ sở để so sánh tốc độ hội tụ của các phương pháp lặp đã đề xuất so với các kết quả của một số tác giả khác.

(II) Nghiên cứu giải bài toán bất đẳng thức biến phân nhiều bậc.

Kiến nghị khác:

Tiếp tục nhận được hỗ trợ từ các cấp, ngành, đơn vị về nhân lực và vật lực để tiếp tục thực hiện hướng nghiên cứu mới của đề tài và để có thể ứng dụng các kết quả nghiên cứu hiệu quả giải quyết các bài toán có ý nghĩa thực tiễn.

Tài liệu tham khảo

[1] Agarwal R., O'Regan D., Shahu, D. (2009), *Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications*, Springer, New York.

[2] Alber Y., Ryazantseva I. (2006), *Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type*, Springer, Netherlands.

[3] Alvarez F., Attouch H. (2001), "An inertial proximal method for maximal monotone operators via discretization of a nonlinear oscillator with damping", *Set-Valued Var. Anal.*, 9(1-3), pp. 3-11.

[4] Aoyama K., Iiduka H., Takahashi W. (2006), "Weak convergence of an iterative sequence for accretive operators in Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2006: 35390, pp. 1-13.

[5] Baiocchi C., Capelo, A. (1984), *Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems*, John Wiley Sons Ltd.

[6] Bauschke H. H. (1996), "The approximation of fixed points of compositions of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 202 , pp. 150-159.

[7] Browder F. (1966), "Existence and approximation of solution of nonlinear variational inequalities", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 56(4), pp. 1080-1086.

[8] Ronald E. Bruck, Jr. (1973), "Properties of fixed point sets of nonexpansive mappings in Banach spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 179, pp. 251-262.

[9] Buong Ng., Duong L. T. (2011), "An explicit iterative algorithm for

a class of variational inequalities in Hilbert spaces", *J. Optim. Theory Appl.*, 151, pp. 513-524.

[10] Buong Ng., Phuong Ng. Th. H. (2013), "Strong convergence to solutions for a class of variational inequalities in Banach spaces by implicit iteration methods", *J. Optim. Theory Appl.*, 159, pp. 399-411.

[11] Buong Ng., Phuong Ng. Th. H., Thuy Ng. T. T. (2015), "Explicit iteration methods for a class of variational inequalities in Banach spaces", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 10, pp. 19-26.

[12] Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "A new explicit iteration method for a class of variational inequalities", *Numer. Algorithms*, 72, pp. 467-481.

[13] Buong Ng., Ha Ng. S., Thuy Ng. T. T. (2016), "Hybrid steepest-descent method with a countably infinite family of nonexpansive mappings on Banach spaces", *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 21, pp. 273-287.

[14] Buong Ng., Quynh V. X., Thuy Ng. T. T. (2016), "A steepest-descent Krasnosel'skii–Mann algorithm for a class of variational inequalities in Banach spaces", *J. Fixed Point Theory Appl.*, 18, pp. 519-532.

[15] Ceng L. C., Ansari Q. H., Yao J.-Ch. (2008), "Mann-type steepest-descent and modified hybrid steepest descent methods for variational inequalities in Banach spaces", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 29(9-10), pp. 987-1033.

[16] Cioranescu I. (1990), *Geometry of Banach Spaces, Duality Mappings and Nonlinear Problems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[17] Cohen G. (1980), "Auxiliary problem principle and decomposition of optimization problems", *J. Optim. Theory Appl.*, 32, pp. 227-305.

[18] Chidume C. (2009), *Geometric Properties of Banach Spaces and Nonlinear Iterations*, Springer-Verlag, London.

[19] Chidume C. E, Chidume C. O, Ali B. (2011), "Convergence of hybrid steepest descent method for variational inequalities in Banach spaces", *Appl. Math. Comput.*, 217, pp. 9499-9507.

[20] Combettes P. L. (2003), "A block - iterative surrogate constraint splitting method for quadratic signal recovery", *IEEE Trans. Signal Process.*, 51, pp. 1771-1782.

[21] Facchinei F., Pang J-Sh. (2003), *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems: Volume I, II*, Springer-Verlag, New York.

[22] Giannessi F., Maugeri A. (1995), *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems*, Springer Science+Business Media, LLC.

[23] Giannessi F. (Ed.) (2000), *Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria: Mathematical Theories*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[24] Goldstein A. A. (1964), "Convex programming in Hilbert space", *Bull. Am. Math. Soc.*, 70, pp. 709-710.

[25] Gubin L. G., Polyak B. T., Raik E. V. (1967), "The method of projections for finding the common point of convex sets", *Comput. Math. Math. Phys.*, 7, pp. 1-24.

[26] Ha Ng. S., Buong Ng., Thuy Ng. T. T. (2017), "A new simple parallel iteration method for a class of variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, DOI 10.1007/s40306-017-0228-x.

[27] Halpern B. (1967), "Fixed points of nonexpanding maps", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, pp. 957-961.

[28] Hartman P., Stampacchia G. (1966), "On some nonlinear elliptic differential functional equations", *Acta Math.*, **115**, pp. 271-310.

[29] Iiduka H. (2012), "Fixed point optimization algorithm and its application to network bandwidth allocation", *J. Comput. Appl. Math.*, 236, pp. 1733-1742.

[30] Iiduka H. (2012), "Fixed point optimization algorithm and its application to power control in CDMA data networks", *Math. Program.*, 133, pp. 227-242.

[31] Iiduka H. (2012), Iterative Algorithm for Triple-Hierarchical Constrained Nonconvex Optimization Problem and Its Application to Network Bandwidth Allocation, *Siam J. Optim.*, 22(3), pp. 862-878.

[32] Iiduka H., Uchida M. (2011), "Fixed Point Optimization Algorithms for Network Bandwidth Allocation Problems with Compoundable Constraints", *IEEE Commun. Lett.*, 15, pp. 596-598.

[33] Iemoto, Sh., Takahashi, W. (2008), "Strong convergence theorems by a hybrid steepest descent method for countable nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Sci. Math. Jpn.*, 21, pp. 555-570.

[34] Kinderlerhrer, D., Stampacchia, G. (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, NewYork.

[35] Konnov I. V. (2007), *Equilibrium Models and Variational Inequalities*, Elsevier, The Netherlands.

[36] Krasnosel'skii M. A. (1955), "Two remarks on the method of successive approximations", *Uspekhi Mat. Nauk*, 10, pp. 123-127.

[37] Lehdili N., Moudafi A. (1996), "Combining the proximal algorithm and Tikhonov regularization", *Optimization*, 37, pp. 239-252.

[38] Levitin E. S., Polyak B. T. (1966), "Constrained Minimization Method", *Comput. Math. Math. Phys.*, 6, pp. 1-50.

[39] Lions J. L., Stampacchia G. (1965), "Inéquations variationnelles non coercives", *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 261, pp. 25-27.

[40] Lions J. L., Stampacchia G. (1967), "Variational inequalities", *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, pp. 493-519.

[41] Liu X., Cui Y.(2010), "The common minimal-norm fixed point of a finite family of nonexpansive mappings", *Nonlinear Anal.*, 73, pp. 76-83.

[42] Martinet B. (1970), "Régularisation d'inéquations variationnelles par approximation successives", *Rev. Fran¸caise Informat. Recherche opérationnelle*, 4, pp. 154-158.

[43] Mann W. R. (1953), "Mean value methods in iteration", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 4, pp. 506–510.

[44] Moudafi A. (2000), "Viscosity approximation methods for fixed-points problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 241, pp. 46-55.

[45] Nakajo K., Takahashi W. (2003), "Strong convergence theorem for non-expansive mappings and nonexpansive semigroup", *J. Math. Anal. Appl.*, 279, pp. 372-379.

[46] Polyak B. T. (1969), " Minimization of unsmooth functionals", *Comput. Math. Math. Phys.*, 9, pp. 14-29.

[47] Rokaffellar R. T. (1976), "Monotone operators and proximal point algorithm", *SIAM J. Contr. Optim.*, 14, pp. 887-897.

[48] Ryazantseva I. P. (2002), "Regularization proximal algorithm for nonlinear equations of monotone type", *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiziki.*, 42, pp. 1295-1303.

[49] Sahu D. R., Wong N. C., Yao J. C. (2011), "A generalized hybrid steepest-descent method for variational inequalities in Banach spaces", *Fixed Point Theory and Applications*, 2011 (2011), Article ID 754702, pp. 1-28.

[50] Slavakis K., Yamada I. (2007), "Robust wideband beamforming by the hybrid steepest descent method", *IEEE Trans. Signal Process.*, 55, pp. 4511-4522.

[51] M. V. Solodov M. V., Svaiter B. F. (2000), "Forcing strong convergence of proximal point iterations in Hilbert space", Math. Progr., 87 , pp. 189-202.

[52] Suzuki T. (2005), "Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces", *Fixed Point Theory Appl.*, 2005, pp. 103-123.

[53] Takahashi W., Ueda Y.(1984), "On Reich's strong convergence theorem for resolvents of accretive operators", *J. Math. Anal. Appl.*, 104, pp. 546-553.

[54] Takahashi W., Takeuchi Y., Kubota R. (2008), "Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 341, pp. 276-286.

[55] Tikhonov A. N. (1963), "On the solution of ill-posed problems and the method of regularization", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 151, pp. 501-504. (Russian).

[56] Tuyen T. M., Ha N. S. (2017), "Parallel iterative methods for a finite family of sequences of nearly nonexpansive mappings in Hilbert spaces", *Comp. Appl. Math.*, DOI 10.1007/s40314-017-0503-4.

[57] Wang S. (2011), "Convergence and weaker conditions for hybrid iterative algorithms", *Fixed Point Theory Appl.*, 2011:3.

[58] Wittmann R. (1992), "Approximation of fixed points of nonexpansive mappings", *Arch. Math.*, 58, pp. 486-491.

[59] Xu H. K., Kim T. H.(2003), "Convergence of hybrid steepest-descent methods for variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 119, pp. 185-201.

[60] Xu H. K.(2003), "An iterative approach to quadratic optimization", *J. Optim. Theory Appl.*, 116, pp. 659-678.

[61] Yamada I. (2001), "The hybrid steepest descent method for the variational inequality problem over the intersection of fixed point sets of nonexpansive mappings", *Inherently Parallel Algorithms in Feasibility and Optimization and Their Applications*, Chapter 8, pp. 473-504.

[62] Yao, Y., Noor, M. A., Liou, Y. C. (2010), "A new hybrid iterative algorithm for variational inequalities", *Appl. Math. Comput.*, 216, pp. 822-829.

[63] Zeidler E. (1990), *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, II/B*, Springer, New York.

[64] Zeng L. C., Wong N. C., Yao J. C. (2007), "Convergence analysis of modified hybrid steepest-descent methods with variable parameters for variational inequalities", *J. Optim. Theory Appl.*, 132, pp. 51-69.